Université de Bourgogne Janvier 2019
Département de Mathématiques - L3

CALCUL DIFFERENTIEL - CORRIGÉ DE L'EXAMEN (3 heures)

Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

I *(4 pts)*

On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y\mathrm{e}^x - y^2x + x^2 = 0\right\}$.

1. ***(2 pts)*** Montrer que $\mathcal{C}$ est, au voisinage de l'origine, le graphe d'une fonction $\varphi\colon x \mapsto y = \varphi(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $f\colon (x,y) \mapsto x^4 + y\mathrm{e}^x - y^2x + x^2$. D'une part, $f(0,0) = 0$. D'autre part, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^x - 2yx$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$. D'après le théorème des fonctions implicites, l'équation $f(x,y) = 0$ définit une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $0 \in \mathbb{R}$, telle que $(x,y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow y = \varphi(x)$. En particulier, $\varphi(0) = 0$.
2. ***(2 pts)*** Calculer la dérivées $\varphi'(0)$. On a $x^4 + \varphi(x)\mathrm{e}^x - \varphi^2(x)x + x^2 = 0$, donc, en dérivant, on obtient

$$\begin{aligned}4x^3 + \varphi'(x)\mathrm{e}^x + \varphi(x)\mathrm{e}^x - 2\varphi'(x)\varphi(x)x - \varphi^2(x) + 2x = 0\\ \varphi'(x)\left(\mathrm{e}^x - 2\varphi(x)x\right) + 4x^3 + \varphi(x)\mathrm{e}^x - \varphi^2(x) + 2x = 0,\end{aligned}$$

donc $\varphi'(0) = 0$.

II *(6 pts)*

On considère l'application $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x,y) = (u,v) = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y, x+y)$.

1. ***(3 pts)*** Montrer que h est un difféomorphisme. L'application h est de classe $\mathcal{C}^1$. On calcule son jacobien en un point $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$J_a h = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y\right) < 0.$$

Donc h est un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$.
De plus, $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une bijection. En effet, soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. On doit montrer que le système $h(x,y) = (u,v)$ a une solution (x,y) unique. On observe que $y = v - x$. Donc la première équation devient $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^v\mathrm{e}^{-x} = u$. Or la fonction $g_v : x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^v\mathrm{e}^{-x}$ vérifie $\lim_{x\to-\infty} g_v(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g_v(x) = +\infty$ et $g_v'(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^v\mathrm{e}^{-x} > 0$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi le point u a un unique antécédent x_0 par g_v, et le point (u,v) a l'unique antécédent $(x_0, v - x_0)$ par h.
2. ***(1 pt)*** Montrer que les fonctions $F\colon (u,v) \mapsto A(u) + \frac{v^2}{2}$ où $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ vérifient $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) = v$ sur $\mathbb{R}^2$. En effet, si on dérive par rapport à v, la fonction A peut être considérée comme constante.
3. ***(2 pts)*** En déduire des solutions $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ de l'équation $\mathrm{e}^y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \mathrm{e}^x\dfrac{\partial f}{\partial y} = (x+y)\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y\right)$. On pourra pour cela poser $f = F \circ h$ pour les solutions f, et déterminer l'équation vérifiée par F. Si $f = F \circ h$, alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial u}(h(x,y))\,\mathrm{e}^x + \frac{\partial F}{\partial v}(h(x,y)), \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial F}{\partial u}(h(x,y))\,\mathrm{e}^y + \frac{\partial F}{\partial v}(h(x,y)).$$

Donc $\mathrm{e}^y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \mathrm{e}^x\dfrac{\partial f}{\partial y} = \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y\right)\frac{\partial F}{\partial v}(h(x,y))$. L'équation satisfaite par F est ainsi : $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) = v$, dont la solution est $F(u,v) = A(u) + \frac{v^2}{2}$. Les solutions demandées sont donc les fonctions $f\colon (x,y) \mapsto A\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y\right) + \frac{(x+y)^2}{2}$, où $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

III *(6 pts)*

On considère l'ensemble $\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 - 4xy + 3y^2 - 4yz + 4z^2 - 1 = 0\right\}$.

1. ***(2 pts)*** Montrer que $\mathcal{S}$ est une sous-variété de de $\mathbb{R}^3$ en chacun de ses points. On pose $f(x,y,z) = 2x^2 - 4xy + 3y^2 - 4yz + 4z^2 - 1$. On voit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x - 4y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -4x + 6y - 4z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -4y + 8z.$$

Ces dérivées partielles s'annulent en les points $(2z, 2z, z)$, $z \in \mathbb{R}$. Mais on voit que $f(2z,2z,z) = -1$. Donc la différentielle de f ne s'annule en aucun point de $\mathcal{S}$, qui est bien une sous-variété de codimension 1 de $\mathbb{R}^3$ en tous ses points.

2. ***(1 pt)*** Soit $a = (x, y, z) \in \mathcal{S}$. Donner l'équation du plan tangent $T_a\mathcal{S}$ à la variété $\mathcal{S}$ au point a. Elle s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)(Z - z) = 0, \text{ donc}$$
$$2(x - y)X - (2x - 3y + 2z)Y - 2(y - 2z)Z = 1.$$

3. ***(2 pts)*** On considère le point $P = (1, 0, 0)$ et l'ensemble $\mathcal{E} = \{a \in \mathcal{S} \colon P \in T_a\mathcal{S}\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan affine d'équation $2x - 2y = 1$. Il suffit de remplacer dans l'équation de $T_a\mathcal{S}$ les coordonnées (X, Y, Z) par $(1, 0, 0)$. On trouve $2(x - y) = 1$

IV ***(4 pts)***

Montrer que le système d'équations

$$x = \frac{1}{4}\sin(x + y) + t - 1$$
$$y = \frac{1}{4}\cos(x - y) - t + \frac{1}{2}$$

admet une unique solution $(x_t, y_t) \in \mathbb{R}^2$, et que l'application $h \colon t \mapsto (x_t, y_t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On applique le théorème du point fixe à paramètres à l'application

$$f_t \colon (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{4}\sin(x + y) + t - 1, \frac{1}{4}\cos(x - y) - t + \frac{1}{2}\right).$$

La matrice jacobienne de f_t au point (x, y) est $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \cos(x + y) & \cos(x + y) \\ -\sin(x - y) & \sin(x - y) \end{pmatrix}$. Donc, si $u = (a, b)$ est un vecteur de norme infinie 1, on a

$$\left\|\mathrm{d}_{(x,y)}f_t(a, b)\right\|_\infty = \frac{1}{4}\|((a + b)\cos(x + y), (b - a)\sin(x - y))\|_\infty \leq \frac{1}{4}\|(a + b, b - a)\|_\infty \leq \frac{1}{4}(|a| + |b|) \leq \frac{1}{2}\|(a, b)\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

Il resulte ainsi de l'inégalité des accroissements finis qu f_t est une contraction de rapport inférieur à $\frac{1}{2}$ en tout point de $\mathbb{R}^2$. On applique alors le Théorème du point fixe à paramètre pour conclure.