L2 Psychologie, Statistiques - Corrigé du TD 1

Exercice 1. Jeu de pile ou face.

1. $n = 10$. $X_{10} \hookrightarrow \mathcal{B}(10, 0.5)$.
   (a) $\mathbb{P}[X_{10} \geq 7] = 0.171$.
   (b) Le plus petit k tel que $\mathbb{P}[X_{10} \geq k]$ est $k = 9$.
2. $n = 1000$. $P_{1000} = X_{1000}/1000$. On vérifie aisément les conditions de grand échantillon. $P_{1000} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(p_0, \sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}\right)$, donc $P_{1000} \hookrightarrow \mathcal{N}(0.5, 0.016)$.
   (a) $\mathbb{P}[X_{1000} \geq 520] = \mathbb{P}\left[P_{1000} \geq \dfrac{520}{1000}\right] = \mathbb{P}[P_{1000} \geq 0.520] = 0.103$.
   (b) Le nombre a tel que $\mathbb{P}[P_{1000} \geq a] = 0.05$ est $a = 0.526$.

Exercice 2. Enfants et jeu collectif.

1. $n = 16$. $S_{16} \hookrightarrow \mathcal{B}(16, 0.65)$. $\mathbb{P}[10 \leq S_{16} \leq 13] = 0.643$.
2. $n = 1000$. $P_n = \dfrac{X_n}{n} \hookrightarrow \mathcal{N}(0.65, 0.015)$. $\mathbb{P}[0.63 \leq P_n \leq 0.67] = 0.815$.
3. $n = 1800$. $P_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0.65, 0.011)$. a tel que $\mathbb{P}[P_n \leq a] = 0.05$ est $a = 0.632$.

Exercice 3. Loi binomiale et loi normale.

1. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(15, 0.55)$. $\mathbb{P}[7 \leq X \leq 10] = 0.698$.
2. $n = 170$, on est dans les conditions d'un grand échantillon. On approche la loi binomiale par une loi normale : $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(np, \sqrt{npq}\right)$. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{N}(68, 0.038)$. $\mathbb{P}[60 \leq X \leq 78] = 0.837$.

Exercice 4. Épreuve d'apprentissage. $n = 17$ (petit échantillon). $m_e = 26.588$, $s_e = 7.762$. On estime l'écart-type σ à l'aide de la loi $\chi^2(16)$. $I_\alpha(\sigma) = [5.958, 12.176]$.

Puis on estime μ à l'aide de la loi $\mathrm{St}(16)$. $I_\alpha(\mu) = [22.475, 30.702]$.

Exercice 5. Désirabilité sociale.

1. $X \hookrightarrow \mathcal{N}(10.5, 4.5)$.
   1. $\mathbb{P}[X \geq 13] = 0.289$.
   2. a tel que $\mathbb{P}[X \geq a] = 0.0 = 95$ est $a = 3.098$.
   3. $\mathbb{P}[X \leq 8] = 0.289 \sim 0.29$.
2. On travaille avec $p = 0.29$, et $n = 300$. $P_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(p, \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right) = \mathcal{N}(0.29, 0.026)$. $\mathbb{P}[P_n \leq 0.25] = 0.063$.
3. Pour les enfants : $n_e = 300$, $m_e = 11.927$, $s_e = 3.645$. Pour les adultes : $n_a = 150$, $m_a = 11.213$, $s_a = 3.134$. Donc intervalle d'estimation de la moyenne des enfants

$$I_\alpha(\mu_e) = [11.513, 12.340],$$

et intervalle d'estimation de la moyenne des adultes :

$$I_\alpha(\mu_a) = [10.710, 11.717].$$

Ces deux intervalles s'intersectent, donc on ne peut pas en déduire que les enfants et les adultes ont des scores moyens de D.S. différents.