L2 – Psychologie - Statistiques
Contrôle 1 - Octobre 2017 – Corrigé

Exercice 1. Un test psychométrique célèbre est le *test de dextérité manuelle de Bonnardel.* On estime que 75% des sujets normaux qui subissent ce test vissent au moins 36 boulons. On applique ce test à 80 ouvriers de l'automobile, et parmi eux, 69 vissent au moins 36 boulons. Avec un niveau d'erreur de 5%, peut-on accepter l'hypothèse que l'habileté manuelle des ouvriers est supérieure à la norme ?

On procède à un test d'ajustement d'une proportion.

1. Formulation des hypothèses.
   H_0 : les ouvriers ont une habileté manuelle dans la norme. H_1 : les ouvriers ont une habileté manuelle supérieure à la norme.
   Pour formuler les hypothèses en termes statistiques, on note p la proportion d'ouvriers qui vissent au moins 36 boulons dans le test de Bonnardel. Les hypothèses deviennent :
   $$H_0 : p = p_0 = 0.75;\ \ H_1 : p > 0.75.$$
   Il s'agit d'un test unilatéral.
   On note que $p_\mathrm{e} = \frac{69}{80} = 0,8625$ est la proportion d'ouvriers *de l'échantillon édudié* qui vissent au moins 36 boulons pendant le test.
2. Statistique du test.
   On note P_n la proportion d'ouvriers qui vissent au moins 36 boulons parmi un échantillon *aléatoire* de $n = 80$ individus. Puisque $n = 80 > 30$, $n \times p_0 = 80 \times 0.75 = 60 > 5$ et $n \times (1 - p_0) = 80 \times 0.25 = 20 > 5$, on a affaire à un grand échantillon. Sous l'hypothèse nulle, on a :
   $$P_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}\right), \text{ c'est à dire } P_n \hookrightarrow \mathcal{N}\,(0.75, 0.048)\,.$$
3. Détermination de la région critique.
   Au niveau d'erreur $\alpha = 5\% = 0.05$, la région critique est de la forme $K_\alpha = \{P_n \geq p_\alpha\}$ avec $\mathbb{P}\,[K_\alpha; \mathcal{N}\,(0.75, 0.048)] = 0.05$. On trouve, à l'aide de la loi normale inverse, $p_\alpha = 0.829$. Donc $K_\alpha = \{P_n \geq 0.829\}$.
4. Décision du test.
   Puisque $p_\mathrm{e} = 0.8625 \in K_\alpha$, on accepte, au niveau d'erreur $\alpha = 5\%$, l'hypothèse H_1 : les ouvriers ont une plus grande habileté manuelle que la normale.

Exercice 2. On applique le *test d'écriture en miroir* à 15 sujets présentant certaines anomalies. Pour chaque sujet, on mesure le temps (en secondes) utilisé pour reproduire trois séries de chiffres et de lettres. On obtient un temps moyen $m_\mathrm{e} = 200.8$ pour un écart-type $s_\mathrm{e} = 19$. On admet que la variable « temps » suit une loi normale dans la population considérée. Peut-on, au risque $\alpha = 5\%$, accepter l'hypothèse que le temps moyen μ est différent de 200 ?

On procède à un test d'ajustement d'une moyenne, pour un *petit échantillon.*

1. Formulation des hypothèses.
   H_0 : le temps moyen égale 200; H_1 : le temps moyen est inférieur à 200. Pour formuler ces hypothèses en termes statistiques, on note μ le temps moyen d'écriture dans la population des sujets présentant une anomalie. On a donc :
   $$H_0 : \mu = \mu_0 = 200;\ \ H_1 : \mu \neq \mu_0 \text{ (test bilatéral).}$$
2. Statistiques du test.
   On note que la taille de l'échantillon $n = 15$ est inférieur à 30. Il s'agit donc d'un *petit échantillon.* Sous l'hypothèse nulle, on a :
   $$T_n = \frac{M_n - \mu_0}{S_n/\sqrt{n-1}} \hookrightarrow \mathrm{St}\,(n-1)\,, \text{ ou encore } T_n = \frac{M_n - 200}{S_n/\sqrt{14}} \hookrightarrow \mathrm{St}\,(14)\,.$$
   où M_n est la moyenne aléatoire des temps utilisés pour un échantillon *aléatoire* de n individus, et S_n est l'écart-type aléatoire.

3. Détermination de la région critique.
   Au niveau d'erreur $\alpha = 5\%$, la région critique est de la forme $K_\alpha = \{T_n \leq a\} \cup \{T_n \geq b\}$ avec $\mathbb{P}[K_\alpha; \mathrm{St}(14)] = 0.05$.
   On trouve $a = -2.145$ et $b = 2.145$, donc $K_\alpha = \{T_n \leq -2.145\} \cup \{T_n \geq 2.145\}$.
4. Décision du test.
   On a $t_e = \frac{m_e - \mu_0}{s_e/\sqrt{n-1}} = \frac{200.8-200}{19/\sqrt{14}} = 0,157 \notin K_\alpha$, donc, au niveau d'erreur $\alpha = 0.05$, on retient l'hypothèse H_0 :le temps moyen d'écriture n'est pas significativement différent de 200.

Exercice 3. Le *test de Bayley* a été conçu pour mesurer le développement du nourrisson/jeune enfant. Cette batterie d'évaluation examine l'ensemble des sphères du développement de l'enfant, permet d'identifier les enfants avec un retard de développement et estime les performances développementales de l'enfant en comparaison à ses pairs.

Dans une étude, des chercheurs appliquent ce test à 50 enfants PRN (Présentant un Poids réduit à la Naissance) âgés de 6 mois. Pour chaque enfant, ils ont relevé le score de Bayley, et obtiennent le tableau suivant :

Scores de Bayley	$[-4, 0[$	$[0, 4[$	$[4, 8[$	$[8, 12[$	$[12, 16[$
Effectifs	3	7	11	17	12

Ces observations permettent-elles de dire que le score moyen des enfants PRN âgés de 6 mois est significativement différent de 8 ?

On procède à un test d'ajustement d'une moyenne, pour un *grand échantillon*.
On a $n = 50$. Un calcul direct montre que : $m_e = 8.24$ et $s_e = 4.676$.

1. Formulation des hypothèses.
   Hypothèse nulle H_0 : le score moyen des enfants PRN âgés de 6 mois est égal à 8.
   Hypothèse alternative H_1 : le score moyen des enfants PRN âgés de 6 mois est significativement différent de 8
   On note μ le score moyen des enfants PRN âgés de 6 mois, pour formuler les hypothèses en termes statistiques. On a alors :
   $$H_0 : \mu = \mu_0 = 8; \; H_1 : \mu \neq 8.$$
   Il s'agit d'un test bilatéral.
2. Statistique du test.
   Puisque $n = 50 > 30$, on travaille avec un *grand échantillon*. Sous l'hypothèse nulle, la variable aléatoire M_n qui rerésente la moyenne des scores sur un échantillon *aléatoire* de n enfants vérifie :
   $$M_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu_0, s_e/\sqrt{n-1}\right), \text{ c'est à dire } M_n \hookrightarrow \mathcal{N}(8, 0.668).$$
3. Détermination de la région critique.
   Avec $\alpha = 0.05$, la région critique K_α est *bilatérale* : $K_\alpha = \{M_n \leq a_\alpha\} \cup \{M_n \geq b_\alpha\}$. On trouve $K_\alpha = \{M_n \leq 6.691\} \cup \{M_n \geq 9.309\}$.
4. Décision du test.
   On voit que $m_e = 8.24 \notin K_\alpha$, donc on retient H_0, au niveau d'erreur $\alpha = 5\%$: la moyenne des scores n'est pas significativement différente de 8.