L2 – Psychologie - Statistiques
Contrôle 2 - Décembre 2017 - Corrigé

Exercice 1. On veut comparer l'estime de soi d'une population d'adolescents et d'une population de jeunes adultes. Pour cela, on note les scores d'estime de soi d'un échantillon de chaque population, et on obtient le tableau suivant :

Adolescents	21	24	32	34	36	24	24	28	38	29	27	24	33	30	39	26
Adultes	41	39	40	46	38	30	37	36	48	34	34	30	1			

1. Calculer les moyennes, les écart-types et les écart-types corrigés des deux échantillons. On désigne par l'indice 1 la population des adolescents et pas l'indice 2 la population des adultes. On a $m_1^{\mathrm{e}} = 29.312$, $s_1^{\mathrm{e}} = 5.3469$, $\hat{s}_1^{\mathrm{e}} = 5.5223$, et $m_2^{\mathrm{e}} = 34.9231$, $s_2^{\mathrm{e}} = 11.0555$, $\hat{s}_2^{\mathrm{e}} = 11.507$.
2. Procéder au test de comparaison des écart-types des deux échantillons. On note σ_1 et σ_2 les ecart-types respectifs des scores d'estime de soi des adolescents et des adultes.
   (a) *Hypothèses.* $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$, $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$.
   (b) *Statistique du test.* Sous l'hypothèse nulle, on a : $f = \dfrac{\left(\widehat{S}_{n_2}\right)^2}{\left(\widehat{S}_{n_1}\right)^2} \hookrightarrow \mathrm{FS}\,(12, 15)$, où f désigne le quotient des variances aléatoires corrigées des deux populations. Attention : ici c'est la population des adultes qui a le plus grand écart-type corrigé. C'est donc celui-ci qu'il faut mettre au numérateur, et la loi suivie par f est bien $\mathrm{FS}\,(12, 15)$, et non pas $\mathrm{FS}\,(15, 12)$!
   (c) *Région critique.* On pose $\alpha = 0.05$. La table de Fisher-Snedecor donne $K_\alpha = \{f \leq a\} \cup \{f \geq 2.963\}$. Puisque le test est bilatéral, la région critique est constituée de deux parties. Mais le nombre a n'est pas donné dans les tables, seule la partie de droite, de la forme $\{f \geq b\}$, nous intéresse. Il n'y a pas de rapport évident entre a et b (en particulier, on n'a pas $a = -b$).
   (d) *Décision.* On a $f_{\mathrm{e}} = \dfrac{11.507^2}{5.5223^2} = 4.342 \notin K_\alpha$, donc on n'admet pas l'égalité des variances. Si on aboutit à la même conclusion après avoir utilisé, à tort, la loi $\mathrm{FS}\,(15, 12)$, le résultat ne peut pas être considéré comme correct.
3. Procéder à un test paramétrique de comparaison des moyennes, qu'on orientera conformément aux résultats expérimentaux (on supposera la normalité des variables étudiées). Il s'agit d'un test de comparaison des moyennes de deux petits échantillons indépendants (car $n_1 = 16 \leq 30$ et $n_2 = 13 \leq 30$). La question est posée de façon un peu abusive : on a montré qu'il n'y a pas égalité des variances, malgré la petite taille des échantillons. On observe que $m_2^{\mathrm{e}} > m_1^{\mathrm{e}}$, donc on oriente le test en conséquence. Ici, on demande d'orienter le test, c'est-à-dire, au sens propre, *de lui donner une orientation* ! Il ne peut donc pas s'agir d'un test bilatéral ! Il est unilatéral, dans un sens conforme au résultat expérimental.
   (a) *Hypothèses.* $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_1 : \mu_1 < \mu_2$, où μ_1 et μ_2 sont les moyennes des scores d'estime de soi des deux populations.
   (b) *Statistiques du test.* On a $s = 8.706$, et $s_{\mathrm{e}} = 3.251$. Alors, sous l'hypothèse nulle, la différence des variables aléatoires vérifie :
   $$T = \frac{M_{n_1} - M_{n_2}}{3.251} \hookrightarrow \mathrm{St}\,(27)\,.$$
   (c) *Région critique.* Les valeurs "très négatives" de T sont favorables à H_1. Avec $\alpha = 0.05$, on a donc $K_\alpha = \{T \leq -1.7033\}$.
   (d) *Décision.* On a $t_{\mathrm{e}} = -1.726 \in K_\alpha$. Donc, au niveau d'erreur 5%, on conserve H_0 : on admet l'égalité des moyennes des scores d'estime de soi.

Exercice 2. Dans le cadre d'une étude portant sur les problèmes comportementaux des enfants, nous avons demandé aux parents d'évaluer le niveau de comportement agressif chez 14 enfants. Un score élevé signifie comportement très agressif. On pense que pense que, de façon générale, les jugements de pères sont plus sévères que ceux des mères. Voici les résultats attribués par les pères et les mères des enfants :

Enfant n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Pères : X	10	12	14	8	16	21	10	15	18	25	20	18	15	12
Mères : Y	6	10	10	8	12	18	8	12	15	19	22	19	7	7
$D = X - Y$	4	2	0	4	3	2	3	3	6	-2	-2	-1	8	5

A l'aide d'un test paramétrique de comparaison des moyennes, vérifier si l'hypothèse est valide (on supposera la normalité des variables X et Y).

Il s'agit d'un test de deux petits échantillons appariés. $n = 14$, m_D^e =2.929 , $s_D^e = 2.576$. Ici, même si le mot n'est pas employé explicitement, il s'agit clairement de deux échantillons appariés : à chaque père du premier échantillon correspond une mère (unique) du deuxième échantillon.

1. *Hypothèses.* $H_0 : m_X = m_Y$, $H_1 : m_X > m_Y$.
2. *Statistique du test.* Sous l'hypothèse nulle, $T = \dfrac{M_n(D)}{S_n(D)/\sqrt{13}} \hookrightarrow \mathrm{St}(13)$, où $M_n(D)$ et $S_n(D)$ représentent la moyenne et l'écart-type aléatoires de D.
3. *Région critique.* On pose $\alpha = 0.05$. Les valeurs de T favorables à H_1 sont "très positives". Donc $K_\alpha = \{T \geq 1.7709\}$.
4. *Décision.* $t_e = \dfrac{2.929}{2.576/\sqrt{13}} = 4.099 \in K_\alpha$, donc, au niveau d'erreur 5%, on accepte l'hypothèse H_0 : les pères jugent plus sévèrement que les mères.