NOTES SUR TESTS DE NORMALITÉ ET NON PARAMÉTRIQUES

- Exercice 1 : Test de normalité de Shapiro-Wilk.

① Hypothèses. (pour C_1)

H_0 : C_1 suit une distribution normale

H_1 : C_1 ne suit pas une distribution normale

② Statistique du test (sous H_0)

$$W = \left(\sum a_i d_i\right)^2 / (n \cdot s^2) \hookrightarrow \text{Loi de Shapiro-Wilk}$$

a_i : coefficients de Shapiro.

d_i : différences emboîtées aléatoires.

n : taille de l'échantillon : $n = 16$

s : écart-type : $s = 6.864$

③ Région critique K_α ($\alpha = 0.05$).

$w_\alpha = 0.887$. $K_\alpha = \{W < 0.887\}$

④ Décision du test : on calcule les différences emboîtées.

30	25	23	21	19	18	16	15
3	7	8	10	12	12	13	14
27	18	15	11	7	6	3	1

: d_i

$$\sum a_i d_i = 27.302$$

$$W_e = \frac{(27.302)^2}{16 \times (6.864)^2} = 0.989 \notin K_\alpha$$

$\underline{W_e > W_\alpha}$: On conserve H_0 : la distribution C_1 vérifie l'hypothèse de normalité (ou suit une loi gaussienne)

Pour C_2 :

$d_1 = 42$
$d_2 = 19$
$d_3 = 16$
$d_4 = 13$
$d_5 = 9$
$d_6 = 8$
$d_7 = 4$
$d_8 = 3$

$$\frac{\left(\sum a_i \cdot d_i\right)^2}{n \cdot S^2}$$

$n = 17$.

$$\begin{cases} W_e = 0.856 \\ W_\alpha = 0.892. \end{cases}$$

$W_e < W_\alpha \Longrightarrow$ on rejette la normalité pour la distribution C_2.

② Test non-paramétrique de comparaison:

test de Mann-Whitney : (petits échantillons indépendants)

On range les deux lignes ensemble.

R_1 = somme des rangs de $C_1 = 254$
R_2 = somme des rangs de $C_2 = 307$

① Hypothèses :

H_0 : il n'y a pas de différence entre les deux distributions.
H_1 : les deux distributions sont différentes

② Statistique (sous H_0)

$i=1,2 \quad U_i = R_i - \dfrac{n_i \times (n_i+1)}{2}$

$$\begin{cases} U_1 = R_1 - \dfrac{16\times 17}{2} = R_1 - 8\times 17 \\ U_2 = R_2 - \dfrac{17\times 18}{2} = R_2 - 9\times 17 \end{cases}$$

$\min(U_1, U_2) \longleftrightarrow$ Mann-Whitney

③ Région critique K_α.

$u_\alpha = 81$.

$$K_\alpha = \{ U \leq 81 \}.$$

④ Décision du test:

$$U_{1e} = 254 - \frac{16\times 17}{2} = 118$$

$$U_{2e} = 307 - \frac{17\times 18}{2} = 154$$

$$u_e = \min(118, 154) = 118 > 81$$

$118 \notin K_\alpha$: on conserve H_0, les deux distributions sont considérées comme égales, au niveau $\alpha = 0.05$.