# TESTS PARAMÉTRIQUES DE COMPARAISON

4 types d'exercices. Comparaison de :

- proportions.
- écarts-types
- moyenne $\begin{cases} \text{échantillons indépendants} \\ \text{— appariés.} \end{cases}$

• **Exercice 1** (Comparaison de proportions).

1. Hypothèses : $p_A$ : proportion de patients satisfaits par le médicament A, et $p_B$ : proportion de patient satisfaits par le médicament B.

$$\begin{cases} H_0 : p_A = p_B \\ H_1 : p_A \neq p_B \end{cases}$$

2. Statistique du test

(*) On calcule $p_0 = \dfrac{n_A \times p_A^e + n_B \times p_B^e}{n_A + n_B}$

$$p_A^e = \frac{150}{200} = 0.75 \qquad p_B^e = \frac{190}{300} = 0.633$$

$$p_0 = \frac{200 \times 0.75 + 300 \times 0.633}{200 + 300} = 0.68$$

$$q_0 = 1 - p_0 = 0.3199\ldots$$

$$S = \sqrt{p_0 \times q_0 \times \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)} = \sqrt{0.68 \times 0.319 \times \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{300}\right)}$$

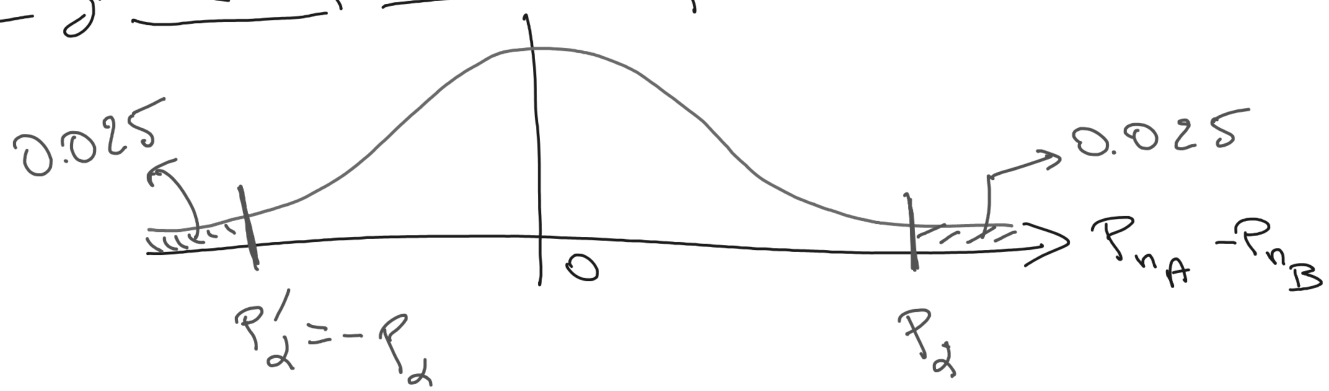
$= 0.0425$

Sous l'hypothèse nulle $H_0$ :

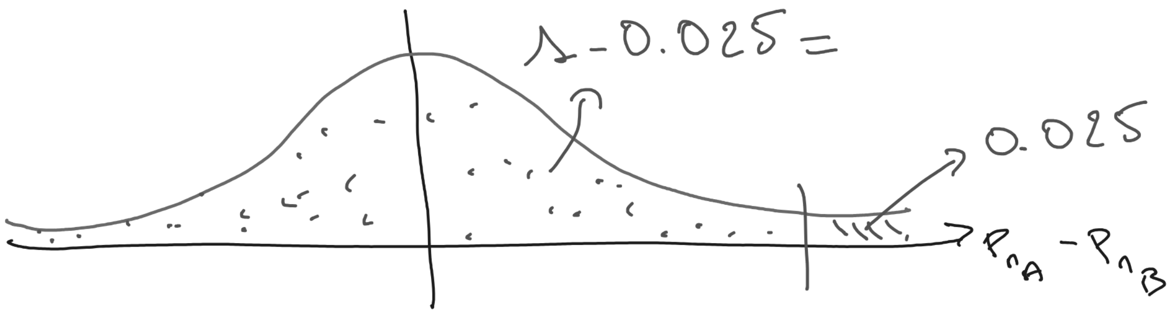
$$P_{n_A} - P_{n_B} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 0.0425)$$

où $P_{n_A}$ et $P_{n_B}$ sont ~~ls~~ les proportions aléatoirs de patients respectivement par ls médicaments A et B

3. Région critique $K_\alpha$ pour $\alpha = 0.05$.




$\longrightarrow$ Exercice de loi normale inverse.




On trouve $P_\alpha = 0.083$ $\qquad P'_\alpha = -0.083$

$$K_\alpha = \{P_{n_A} - P_{n_B} < -0.083\} \cup \{P_{n_A} - P_{n_B} > 0.083\}$$

4. Décision du test au niveau $\alpha = 0.05$ :

$$P_e = P^e_{n_A} - P^e_{n_B} = 0.75 - 0.633 \simeq 0.12 > 0.083$$

$P_e \in K_\alpha$ : au niveau $\alpha = 0.05$, on accepte $H_1$ : les deux calmants ont une efficacité différente

• Exercice 2 (Comparaison de variances, puis de moyennes)

① Comparaison de variancs (ou écart-type).

$L_1$ : première ligne, avec 1-Var : calculer :

$m_t^e = 89.286$ $\quad s_t^e = 5.799$ $\quad \hat{s}_t^e = 6.018$

$m_c^e = 72$ $\quad S_c^e = 7.937$ $\quad \hat{s}_c^e = 8.290$

1. Hypothèses : $\sigma_c$ : écart-type du groupe cible, $\sigma_t$ : écart-type groupe témoin

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_t = \sigma_c \\ H_1 : \sigma_t \neq \sigma_c \end{cases}$$

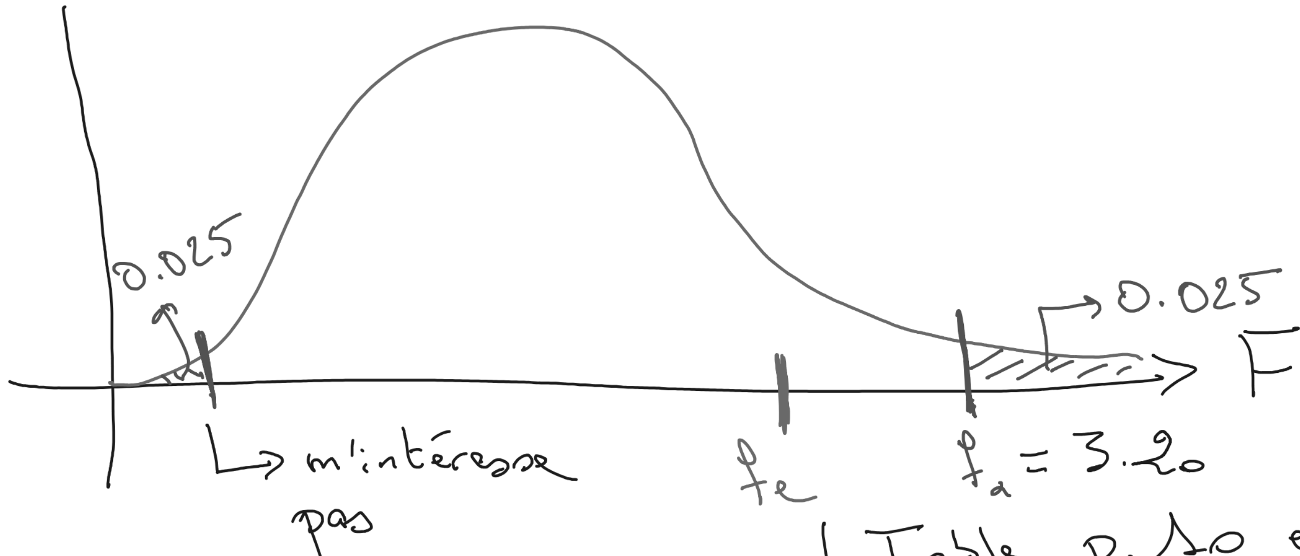
2. Statistique du tst : sous l'hypothèse nulle :

$$F = \frac{\hat{S}_c^2}{\hat{S}_t^2} \hookrightarrow \underbrace{FS}_{\text{Fisher-Snedecor}}(12-1, 14-1)$$

où $\hat{S}_c$ et $\hat{S}_t$ sont ls écart-typs aléatoirs corrigés des cibls et ds témoins :

$$F = \frac{\hat{S}_c^2}{\hat{S}_t^2} \hookrightarrow FS(11, 13)$$

3. Détermination de $K_\alpha$ (avec $\alpha = 0.05$).




$K_\alpha = \{ F \geq 3.20 \}$. | Table p. 10 et 11 (avec 0.025)

4. Décision du test (au niveau $\alpha = 0.05$)

$$f_e = \frac{(s_c^e)^2}{(s_t^e)^2} = \frac{(8.290)^2}{(6.018)^2} = 1.897 < 3.20$$

$f_e \notin K_\alpha$ donc au niveau d'erreur 5% on conserve $H_0 : \sigma_c = \sigma_t$.

② Comparaison de moyennes (on a fait l'hypothèse de normalité).

1. Hypothèses

On note $\mu_t$ : moyenne de déplacement des témoins, et $\mu_c$ : ______ des cibles.

$$\begin{cases} H_0 : \mu_t = \mu_c \\ H_1 : \mu_t > \mu_c. \end{cases}$$

2. Statistique du test (sous l'hypothèse nulle).

$$s = \sqrt{\frac{n_t \cdot s_t^2 + n_c \cdot s_c^2}{n_t + n_c - 2}} = \sqrt{\frac{14 \times}{14 + 12 - 2}}$$

$$= 7.149$$

$$s\sqrt{\frac{1}{n_c} + \frac{1}{n_t}} = 7.149\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{14}}$$

$$= 2.813$$

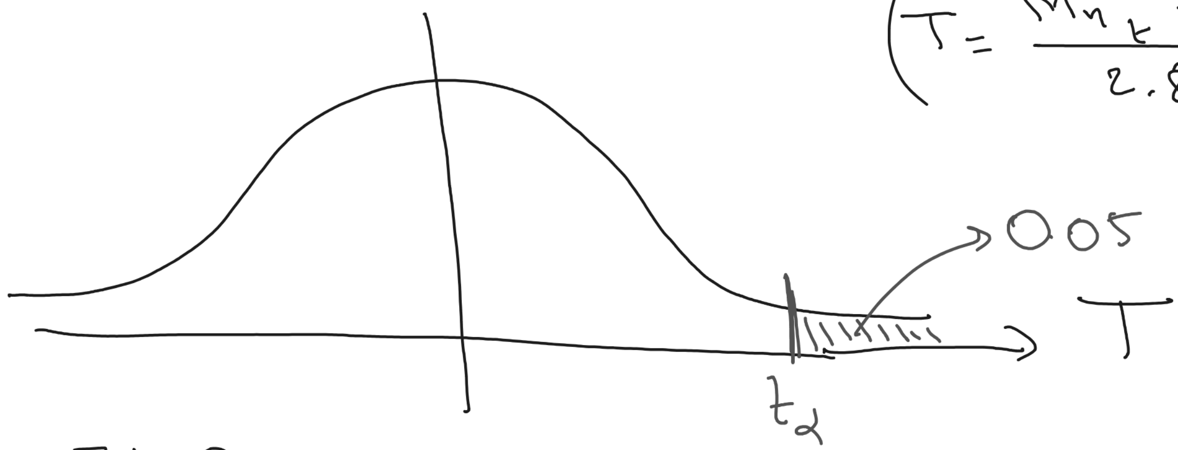
Sous l'hypothèse nulle, on a :

$$T = \frac{M_{n_t} - M_{n_c}}{2.813} \hookrightarrow St(24)$$

où $M_{n_t}$, $M_{n_c}$ sont les moyennes aléatoires des vitesses témoin et cible

3. Région critique $K_\alpha$ avec $\alpha = 0.05$

$$\left(T = \frac{M_{n_t} - M_{n_c}}{2.813}\right)$$




$$t_\alpha = 1.7109 \longrightarrow K_\alpha = \{T > 1.7109\}$$

4. Décision au niveau $\alpha$ :

$$t_e = \frac{m_t^e - m_c^e}{2.813} = 6.145 > 1.7109 \in K_\alpha$$

Au niveau d'erreur $\alpha = 5\%$ on admet $H_1$ : la vitesse moyenne de déplacement oculaire du groupe cible ~~est~~ est plus faible que celle du groupe témoin.

• Exercice 3

① Hypothèses : $H_0$ : le niveau moyen de beta-endorphines chez les patients n'a pas changé

$H_1$ : Ce niveau moyen a augmenté sous l'effet du stress

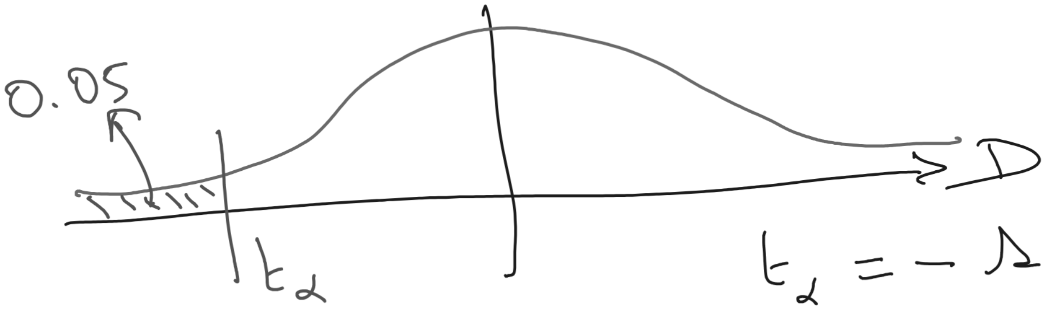
On note $\mu_X$ et $\mu_Y$ les moyennes des v.a. $X$ et $Y$ : $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases}$

② Statistique du test . $D = X - Y$. Sous l'hypothèse $H_0$, grâce à la normalité des variables on a :

$$T = \frac{M_n(D)}{S_n(D)/\sqrt{14}} \hookrightarrow St(14)$$

où $M_n(D)$ et $S_n(D)$ sont les moyennes et écart-types aléatoires de $D$.

③ . Région critique au niveau $\alpha = 0.05$ .




$t_\alpha = -1.7613$

$$K_\alpha = \{T \leq -1.7613\}$$

(4) Décision au niveau $\alpha$.

$d_e = -10, -5.5, -6, -9.5, 2.5, -13, -3, 0, -0.2$
$-20.3, -4, -35, 3.5, 1.9, 0$

$m_e = -6.573$ , $S_e = 9.871$

$$t_e = \frac{m_e}{S_e/\sqrt{n-1}} = \frac{-6.573}{9.871/\sqrt{14}} = -2.492 < -1.7613$$

Donc $t_e \in K_\alpha$. Au niveau $\alpha = 5\%$, on accepte $H_1$ : les béta-endorphines augmentent en situation de stress.

. Exercice 4. On commence par le test de comparaison des écarts types.

Entreprise 1 : $m_1^e = 2.05$, $(s_1^e)^2 = 3.05$, $n_1 = 70$

Entreprise 2 : $m_e^e = 3.01$, $(s_2^e)^2 = 2.14$, $n_2 = 53$

(1) Hypothèses :

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \\ H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases}$$

($\sigma_1$ : écart-type de jours d'absence de $E_1$
$\sigma_2$ : pour $E_2$.)

(2) Statistique du test

$$F = (\hat{S}_n^1)^2 / (\hat{S}_n^2)^2 \longleftrightarrow FS(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

où $(\hat{S}_n^1)^2$ et $(\hat{S}_n^2)^2$ représentent les deux variances aléatoires corrigées

$$F = \frac{(\hat{S}_n^1)^2}{(\hat{S}_n^2)^2} \hookrightarrow FS(69, 52)$$

③ Région critique $K_\alpha$ au niveau $\alpha = 0.05$

$1.67 < f_\alpha < 1.71$. $\quad K_\alpha = \{F \geq f_\alpha\}$

④ Décision :

$$f_e = \frac{(\hat{S}_1^e)^2}{(\hat{S}_2^e)^2} = \frac{(S_1^e)^2 \cdot \frac{n_1}{n_1 - 1}}{(S_2^e)^2 \cdot \frac{n_2}{n_2 - 1}} = \frac{V_1^e \, \frac{n_1}{n_1 - 1}}{V_2^e \, \frac{n_2}{n_2 - 1}}$$

$$V_e \longrightarrow \hat{V}_e = V_e \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$f_e = \frac{3.05 \times \frac{70}{69}}{2.14 \times \frac{53}{52}} = 1.418$$

$f_e < f_\alpha$ donc $f_e \notin K_\alpha$ : on conserve l'hypothèse $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$.

TEST DE COMPARAISON DES MOYENNES:

Calculs préliminaires pour le cas de deux grands échantillons indépendants avec $\sigma_1 = \sigma_2$.

$$s = \sqrt{\frac{n_1 (S_1^e)^2 + n_2 (S_2^e)^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{70 \times 3.05 + 53 \times 2.14}{70 + 53 - 2}}$$

$= 1.644$

$$s' = s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 1.644\sqrt{\frac{1}{70} + \frac{1}{53}}$$

$$= 0.299$$

1. Hypothèses : $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$\mu_1, \mu_2$ : moyenns de deux entreprises.

2. Statistique du test. On a deux grands échantillons ($70 > 30$, $53 > 30$), indépendants, et $\sigma_1 = \sigma_2$.

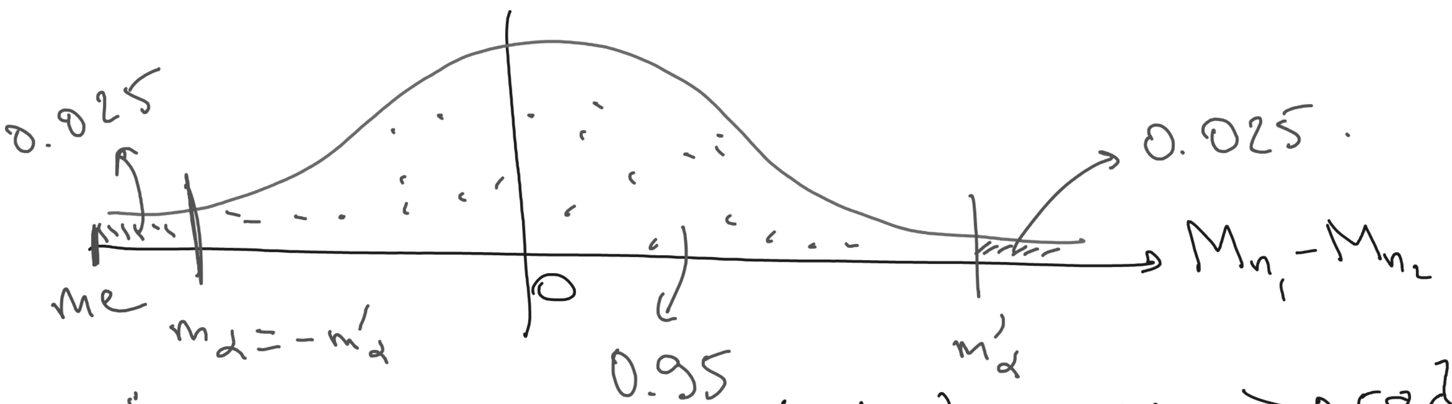
Sous l'hypothèse nulle :

$$M_{n_1} - M_{n_2} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$$

$$M_{n_1} - M_{n_2} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 0.299)$$

où $M_{n_1}, M_{n_2}$ sont les moyenns aléatoires des jours d'absence.

3. Région critique $K_\alpha$, avec $\alpha = 0.05$




$$K_\alpha = \{M_{n_1} - M_{n_2} < -0.586\} \cup \{M_{n_1} - M_{n_2} > 0.586\}$$

4. <u>Décision du test</u>.

$m_e = m_{e1} - m_{e2} = 2.05 - 3.01 = -0.96$

$m_e \in K_\alpha$ donc, au niveau d'erreur 5%, on accepte $H_1$ : nombre moyen de jours d'absence différent.