# AJUSTEMENT DE MOYENNE ET VARIANCE

- **Exercice 1.**

1. Calculer $m_e$ et $s_e$.

$m_e = 126.1$
$s_e = 16.647$
$\hat{s}_e = 16.675$

2. Test d'ajustement de moyenne :

Hypothèses
On note $m$ le coefficient - performance moyen des étudiants de CM2.

$$\begin{cases} H_0 : m = m_0 = 130 \\ H_1 : m < m_0 \end{cases}$$

Statistique du test : $n = 300 > 30$, grand échantillon : sous l'hypothèse nulle $H_0$ :

$$\frac{M_n - m_0}{s_e / \sqrt{n-1}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

où $M_n$ moyenne aléatoire. C'est équivalent à

$$M_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_0, \frac{s_e}{\sqrt{n-1}}\right)$$

$$\frac{s_e}{\sqrt{n-1}} = 0.963$$

$$M_n \hookrightarrow \mathcal{N}(130, 0.963)$$

Région critique au niveau $\alpha = 0.05$ :

$$K_\alpha = \{M_n \leq m_\alpha\} \quad \text{avec } \mathbb{P}[K_\alpha] = 0.05$$
$$= \{M_n \leq 128.416\}$$

Décision du test : $m_e = 126.1 \leq m_\alpha$

$m_e \in K_\alpha$. Au niveau $\alpha = 0.05$, on admet $H_1$.

3. Puissance $\eta(127)$

$$\eta(127) = \mathbb{P}[K_\alpha, \mathcal{N}(127, 0.963)]$$
$$= \mathbb{P}[M_n \leq 128.416 ; \mathcal{N}(127, 0.963)]$$
$$= 0.929$$

Si la moyenne réelle est de 127, le test a 92.9 % d'accepter $H_1$ (à juste titre).

4. Test d'ajustement de proportion.

Hypothèses : $p$ : proportion des élèves dont le coeff. perf. est inférieur à 130

$$H_0 : p = p_0 = 60\% = 0.6$$
$$H_1 : p \neq p_0$$

Statistique : Sous l'hypothèse nulle $H_0$.

$$P_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right)$$ où $P_n$ est la proportion aléatoire, $n = 300$

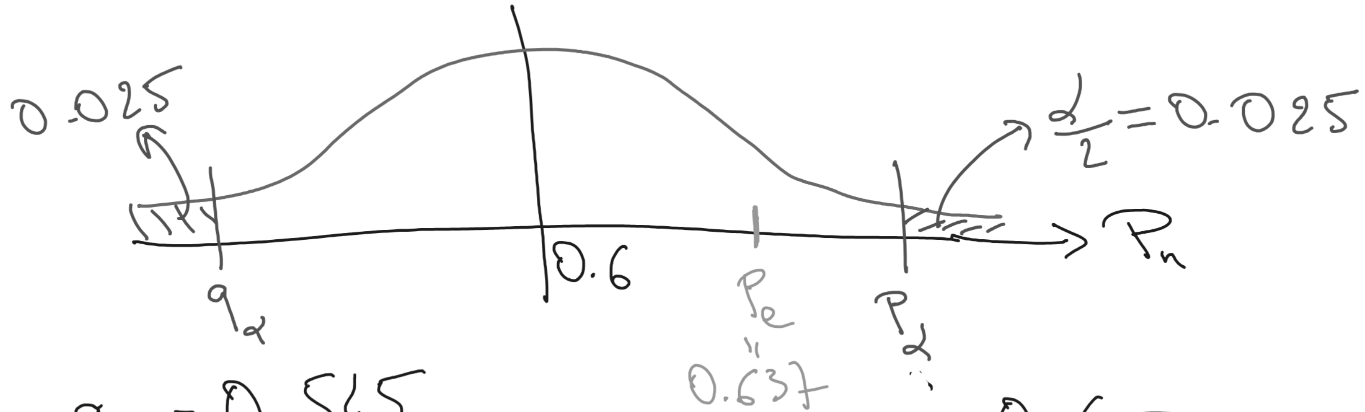
$(n = 300 > 30,\ n \times p_0 = 180 > 5,\ n \times q_0 = 120 > 5)$

$\longrightarrow$ Grand échantillon.

$(q_0 = 1 - p_0 = 0.4)$

$$P_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0.6, 0.028)$$

. Région critique (bilatérale) $K_\alpha$, pour $\alpha = 0.05$.




$q_\alpha = 0.545$ $\quad p_\alpha = 0.655$

$$K_\alpha = \{P_n \leq 0.545\} \cup \{P_n \geq 0.655\}.$$

· **Décision du test** : $n_e = 191$

$$P_e = \frac{191}{300} \simeq 0.637$$

$P_e \notin K_\alpha$ donc on conserve $H_0$ au niveau $\alpha = 0.05$.

· **Exercice 2** $\quad m$ : moyenne des sujets.

$$\begin{cases} H_0 : & m = m_0 = 30 \\ H_1 & m < m_0 \end{cases}$$

**Statistique du test** : $n = 17 < 30$ (petit échantillon)

Sous l'hypothèse $H_0$

$$T_n = \frac{M_n - m_0}{S_n / \sqrt{n-1}} \hookrightarrow St(\underline{n-1})$$

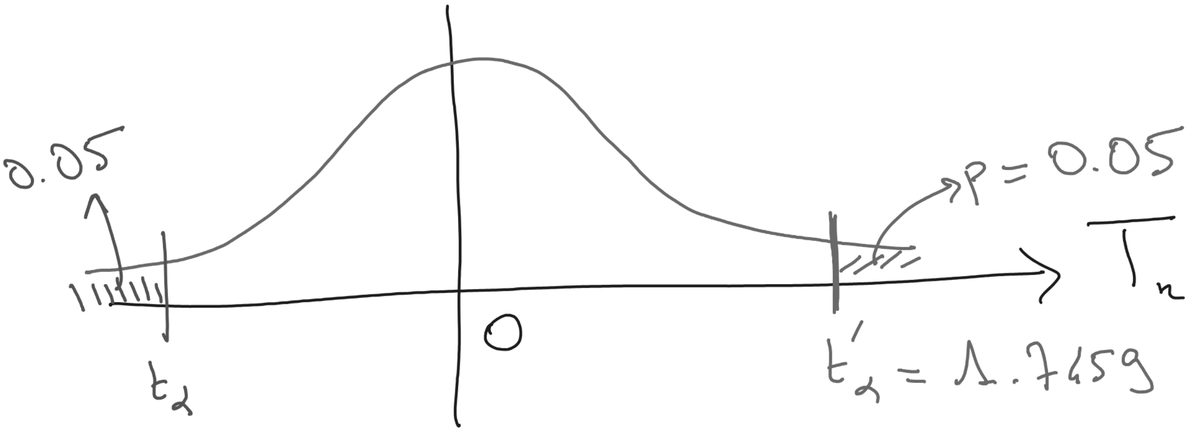
↳ degrés de liberté ddl.

$M_n$ : moyenne aléatoire
$S_n$ : écart-type aléatoire

Donc : $T_n = \dfrac{M_n - 30}{S_n / \sqrt{16}} \hookrightarrow St(16)$

· **Région critique $K_\alpha$, $\alpha = 0.05$** : On cherche $t_\alpha$.

$$\mathbb{P}[T_n \leq t_\alpha] = 0.05$$




$t_\alpha = -1.7459$

$K_\alpha = \{T_n \leq -1.7459\}$.

<u>Décision du test</u>. $m_e =$

$$t_e = \frac{m_e - m_0}{s_e/\sqrt{n-1}} = \frac{26.588 - 30}{7.762/\sqrt{16}}$$

$$= -1.758 < t_\alpha$$

Donc $t_e \in K_\alpha$. Au niveau $\alpha = 0.05$ on accepte $H_1$.

---

. <u>Exercice 3</u> : remplir L1 avec les centres de classes. L2 : effectifs.

1) $n = 150$, $m_e = 7.819$ $s_e = 1.282$

2) <u>Hypothèses</u> : m : durée moyenne heurs de sommeil chez les adultes.

$$\begin{cases} H_0 : m = m_0 = 8 \\ H_1 : m \neq m_0 \end{cases}$$

<u>Statistique du test</u> : $n = 150 > 30$ : grand échantillon

Sous l'hypothèse nulle

$$M_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_0, \frac{s_e}{\sqrt{n-1}}\right)$$ où $M_n$ : moyenne aléatoire

$$M_n \hookrightarrow \mathcal{N}(8, 0.105)$$

Région critique pour $\alpha = 0.05$.

$$K_\alpha = \{M_n \leq m_{\alpha_1}\} \cup \{M_n \geq m_{\alpha_2}\}$$

$$K_\alpha = \{M_n \leq 7.794\} \cup \{M_n \geq 8.206\}$$

Décision du test. $m_e = 7.819 \notin K_\alpha$. Au niveau $\alpha = 0.05$ on conserve $H_0$.

• Exercice 4.

1. Affirmation sur la moyenne de la réduction du temps de production.

• Hypothèse : $m$ moyenne (réelle) de la réduction du temps de production

$$H_0 : m = m_0 = 8\%$$

$$H_1 : m < m_0$$

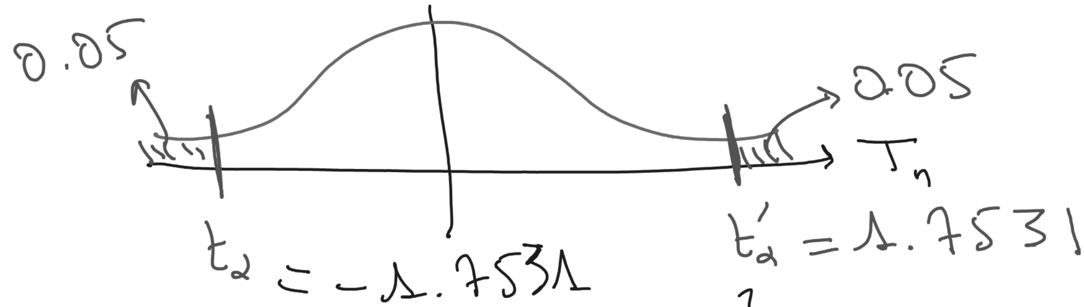
• Statistiques du test : $n = 16$ (petit échantillon)

Sous l'hypothèse nulle :

$$T_n = \frac{M_n - m_0}{S_n / \sqrt{n-1}} \hookrightarrow St(n-1)$$

$$T_n = \frac{M_n - 8}{S_n / \sqrt{15}} \hookrightarrow St(15).$$

• Région critique $K_\alpha$, $\alpha = 0.05$




$$K_\alpha = \{T_n \leq -1.7531\}.$$

• <u>Décision du test</u> :

$$t_e = \frac{m_e - m_0}{s_e / \sqrt{n-1}} = \frac{7.8 - 8}{0.5/\sqrt{15}}$$

$= -1.549 \notin K_\alpha$ : donc, au niveau

$\alpha = 0.05$, on conserve l'hypothèse $H_0$.

• Test d'ajustement de variance (ou écart-type).

1. <u>Hypothèses</u> : $\sigma$ écart-type réel dans l'entreprise

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 = 0.25$$

$$H_1 : \sigma > \sigma_0$$

2. <u>Statistique du test</u> : Sous l'hypothèse nulle, la v.a. $Y_n$ vérifie :

$$Y_n = \frac{n V_n}{\sigma_0^2} \hookrightarrow \chi^2(n-1)$$

où $V_n$ est la variance aléatoire, $n = 16$.

Donc

$$Y_n = \frac{16 V_n}{(0.25)^2} \hookrightarrow \chi^2(15)$$

3. <u>Région critique au niveau $\alpha = 0.05$</u>. On observe sur la table du $\chi^2$ que $y_\alpha = 25$.

Donc $K_\alpha = \{Y_n \geq 25\}$

4. <u>Décision du test</u>. On $y_e = \dfrac{16 \times (0.5)^2}{(0.25)^2} = 64 > 25$

$y_e \in K_\alpha$ : au niveau $\alpha = 0.05$, on accepte $H_1$.

• Exercice 5.

1. $m_e = 98.306$
$s_e = 9.790$

2. a) Hypothèses.

$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 100 \\ H_1 : \mu < \mu_0. \end{cases}$ ($\mu$ moyenne réelle des résultats)

Statistique du test : ajustement de moyenne pour un grand échantillon. $n = 150 > 30$

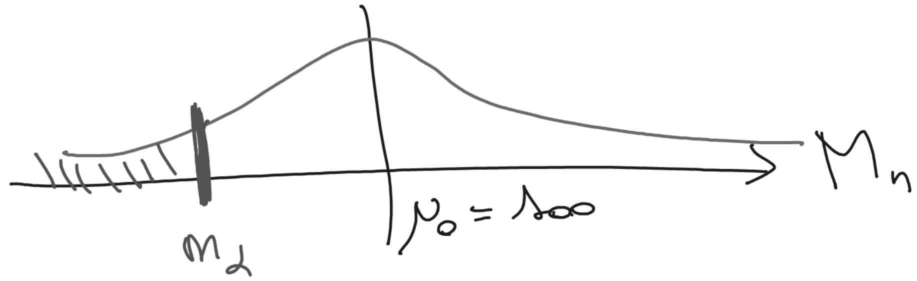
Sous l'hypothèse nulle,

$$M_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu_0, \frac{s_e}{\sqrt{n-1}}\right)$$

où $M_n$ est la moyenne aléatoire des résultats

$$M_n \hookrightarrow \mathcal{N}(100, 0.802)$$

• Région critique au niveau $\alpha = 0.05$ :




On trouve $m_\alpha = 98.680$

$$K_\alpha = \{ M_n \leq 98.68 \}.$$

• Décision du test : $m_e = 98.306 < 98.68$

$m_e \in K_\alpha$ : Au niveau $\alpha = 0.05$ on accepte l'hypothèse $H_1$.

$$\eta(98) = \mathbb{P}\left[K_\alpha , \mathcal{N}\left(98, \frac{S_e}{\sqrt{n-1}}\right)\right]$$

$$= \mathbb{P}\left[M_n \leq 98.68 ; \mathcal{N}(98, 0.802)\right]$$

$$= 0.8019 = 80.19\ \%$$

Si la moyenne réelle des résultats est 98, le test a 80.19 % de chances d'accepter $H_1$.

- Exercice 6 : $m_e = 90.643$
  $S_e = 6.376$

* Ajustement de moyenne : on note $\mu$ la moyenne générale des gains :

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 95 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

* Statistique du test. La variable observée suit une loi normale. $n = 14 < 30$ (petit échantillon)

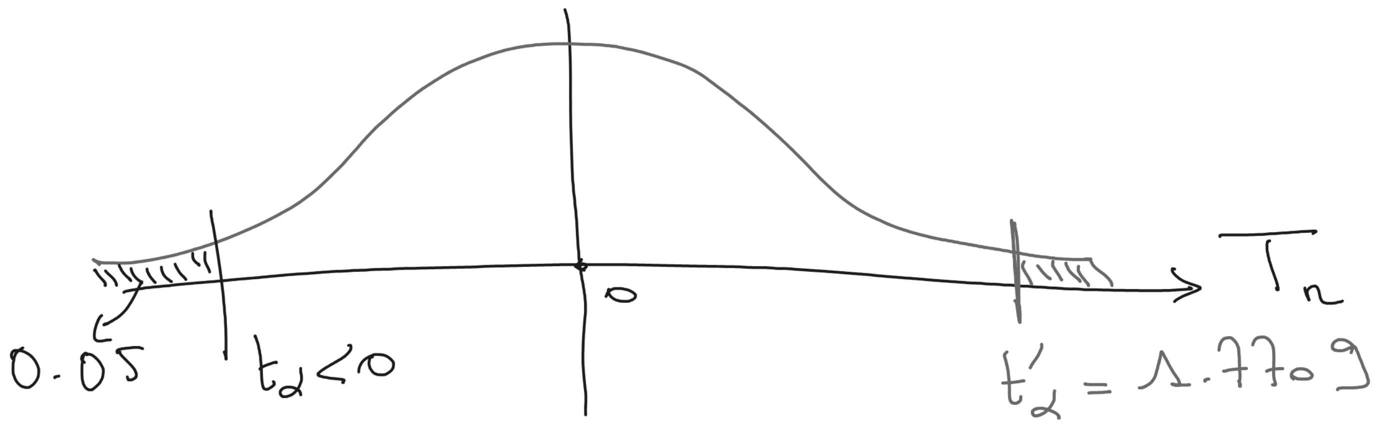
Sous l'hypothèse nulle, on a :

$$T_n = \frac{M_n - \mu_0}{S_n / \sqrt{n-1}} \hookrightarrow St(n-1)$$

$$T_n = \frac{M_n - 95}{S_n / \sqrt{13}} \hookrightarrow St(13)$$

$M_n$ : moyenne aléatoire, $S_n$ : écart-type aléatoire.

Région critique au niveau $\alpha = 0.05$




$$t_\alpha = -1.7709 \qquad K_\alpha = \{M_n \leq -1.7709\}$$

Décision du test :

$$t_e = \frac{m_e - 95}{\frac{Se}{\sqrt{13}}} = \frac{90.642 - 95}{\frac{6.376}{\sqrt{13}}} = -2.464$$

$t_e \in K_\alpha$ : Au niveau $\alpha = 0.05$, on accepte $H_1$.

· Exercice 6, 2ème partie : test d'ajustement d'écart-type

1. Hypothèses : $\sigma$ : écart-type de la population.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma = \sigma_0 = 5 \\ H_1 : \sigma > \sigma_0. \end{cases}$$

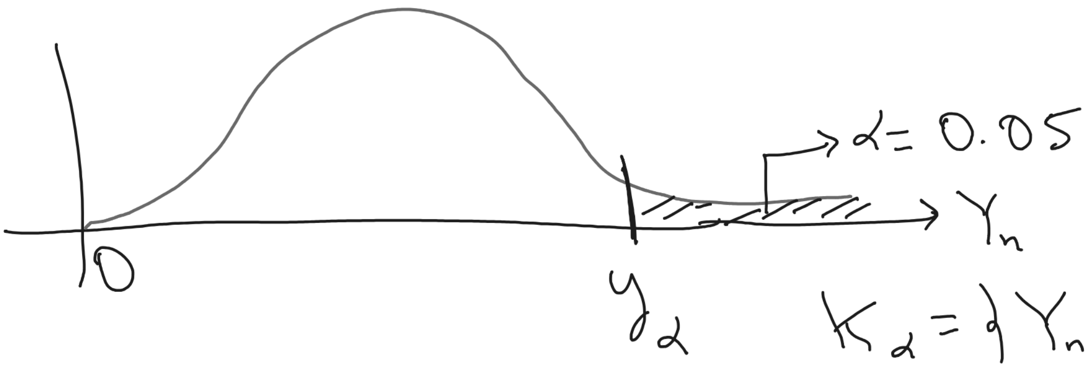
2. Statistique du test : $n = 14$, sous l'hypothèse nulle, la v.a. $Y_n$ vérifie

$$Y_n = \frac{n S_n^2}{\sigma_0^2} \hookrightarrow \chi^2(n-1)$$

$$Y_n = \frac{14 \times S_n^2}{5^2} \hookrightarrow \chi^2(13)$$

où $S_n$ est l'écart-type aléatoire des scores

3. <u>Région critique $K_\alpha$</u> (au niveau $\alpha = 0.05$)




$K_\alpha = \{Y_n \geq y_\alpha\}$.

$y_\alpha = 22.36$ : $K_\alpha = \{Y_n \geq 22.36\}$.

4. <u>Décision du test au niveau $\alpha = 0.05$</u>.

$$y_e = \frac{14 \times S_e^2}{5^2} = \frac{14 \times 6.38^2}{25} = 22.768$$

$y_e > y_\alpha$, donc $y_e \in K_\alpha$

<u>Conclusion.</u> Au niveau $\alpha = 0.05$, on accepte l'hypothèse $H_1 : \sigma > 5$.