TD N°3 : AJUSTEMENT DE PROPORTIONS.

- **Ex. 1** (Crèche) ⊛ Hypothèses

$$\begin{cases} H_0 : \text{crèche n'a pas d'effet sur la perception sociale} \\ H_1 : \text{crèche effet positif} \end{cases}$$

p : proportion du nombre en crèche qui ont une meilleure perception sociale que leur jumeau resté à la maison.

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.5 \\ H_1 : p > 0.5 \end{cases}$$

Statistique du test. $n = 350$ $\quad p_0 = 0.5$, $q_0 = 0.5$

$$\left.\begin{cases} n = 350 > 30 \\ n \times p_0 = 350 \times 0.5 = 175 > 5 \\ n \times q_0 = 175 > 5 \end{cases}\right\} \longrightarrow \text{on a bien un grand échantillon}$$

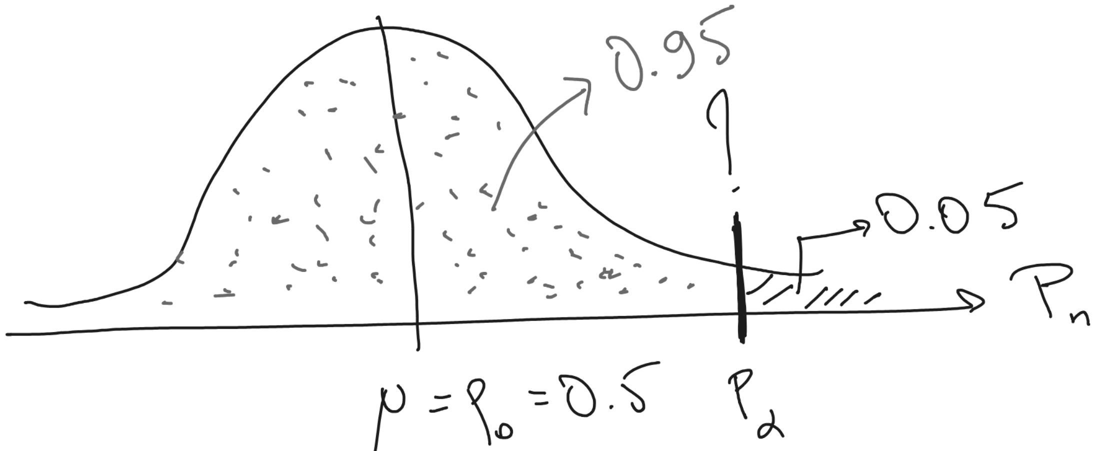
Donc, sous l'hypothèse H_0, la proportion aléatoire P_n vérifie :

$$P_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(p_0 ; \sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}\right)$$

$$P_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0.5, 0.027)$$

- Région critique au niveau $\alpha = 0.05$

On cherche p_α tel que $\mathbb{P}[P_n > p_\alpha] = \alpha = 0.05$



On trouve $p_\alpha = 0.544..$

$K_\alpha = \{P_n \geq 0.544\}$.

<u>Décision du test</u> : $p_e = \frac{200}{350} = 0.571$

$p_e \in K_\alpha$. Donc au niveau $\alpha = 0.05$, on accepte H_1.

<u>p-value</u> : $\mathbb{P}[P_n \geq p_e] = \mathbb{P}[P_n \geq 0.571]$
$= 0.004$

p-value petite donc test significatif.

<u>puissance</u> : ① $\eta(0.6) = \mathbb{P}\left[P_n \geq p_\alpha ; \mathcal{N}\left(0.6, \sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{350}}\right)\right]$
$= 0.983$

② $\eta(0.7) = \mathbb{P}\left[P_n \geq p_\alpha ; \mathcal{N}\left(0.7, \sqrt{\frac{0.7 \times 0.3}{350}}\right)\right]$

$= 0.999... \sim 1$ (100%)

Interprétation : si la proportion réelle de jumeau de la crèche ayant une meilleure perception sociale que celle de leur jumeau resté à la maison est de 0.7 (= 70%), alors notre test a justement à 100% de chances (donc est certain) d'accepter (à juste titre!) l'hypothèse H_1 (avec toujours un risque d'erreur de 5%).

• **Exercice 2** : $n = 200$

1. **Hypothèses.**

$$H_0 : p = p_0 = 0.3$$
$$H_1 : p < p_0$$

(p : proportion des scores inférieurs à 25 secondes)

2. **Statistiques du test** : sous l'hypothèse nulle, $P_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0.3, 0.032)$

$n = 200 > 30$, $n \times p_0 = 200 \times 0.3 = 60 > 5$

$n \times q_0 = 200 \times 0.7 = 140 > 5$

(Grand échantillon).

3. **Région critique** K_α au niveau $\alpha = 0.05$.

On cherche P_α tel que : $\mathbb{P}[P_n \leq P_\alpha] = 0.05$

$P_\alpha = 0.247$. $\quad K_\alpha = \{P_n \leq 0.247\}$

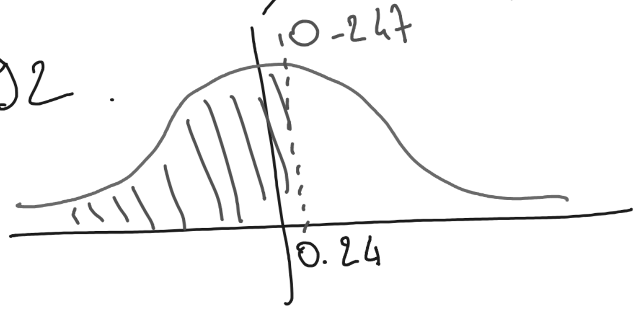
4. **Décision du test** : $P_e = \frac{48}{200} = 0.240 < P_\alpha$

$P_e \in K_\alpha$ donc on accepte H_1 au niveau $\alpha = 0.05$

• **Puissance** : $\eta(0.24) = \mathbb{P}\left[P_n \leq 0.247, \mathcal{N}\left(0.24, \sqrt{\frac{0.24 \times 0.76}{200}}\right)\right]$

$= \mathbb{P}[P_n \leq 0.247, \mathcal{N}(0.24, 0.0302)]$

$\simeq 0.592$.



Exercice 3. $p_0 = 0.6$, $n = 250$, $n_e = 130$

$$p_e = \frac{130}{250} = 0.52$$

* Hypothèses.

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 = 0.6 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$$

p proportion réelle du nombre de guérisons.

* Statistique du test.

$n = 250 > 30$, $n \times p_0 = 250 \times 0.6 = 150 > 5$

$n \times q_0 = 250 \times 0.4 = 100 > 5$

$\longrightarrow$ Grand échantillon : sous l'hypothèse H_0, on a :

$$\underbrace{P_n}_{\text{proportion aléatoire de guérisons.}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0.6, 0.031)$$

* Région critique K_α, avec $\alpha = 0.05$.

Trouver p_α tel que $\mathbb{P}[P_n \leq p_\alpha] = 0.05$

$p_\alpha = 0.549$. $K_\alpha = \{P_n \leq 0.549\}$.

* Décision du test : $p_e = \frac{130}{250} = 0.52 < 0.549$.

$p_e \in K_\alpha$: au niveau $\alpha = 0.05$, on accepte l'hypothèse H_1.

$\longrightarrow$ p-value $= \mathbb{P}[P_n \leq p_e]$

$= \mathbb{P}[P_n \leq 0.52] = 0.005$

$\longrightarrow$ Puissance $\eta(0.5) = \mathbb{P}\left[P_n \leq 0.549, \mathcal{N}\left(0.5, \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{250}}\right)\right]$

$= 0.939$

- Exercice 4. Fait par une étudiante
- Exercice 5 : $P_0 = 25\% = 0.25$ (proportion échecs).

$n = 100$ $\qquad$ $n_e = 20$ (nbre échecs)

(*) Hypothèses : p : proportion d'échecs avec la nouvelle méthode.

$$\begin{cases} H_0 : p = P_0 = 0.25 \\ H_1 : p < P_0 = 0.25 \end{cases}$$

(*) Statistique du test :

$n = 100 > 30$, $\quad n \times p_0 = 100 \times 0.25 = 25 > 5$

$n \times q_0 = 100 \times 0.75 = 75 > 5.$

$\longrightarrow$ Grand échantillon,

$\longrightarrow P_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0.25, \sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{100}}\right)$

$P_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0.25, 0.043)$

P_n $\rightarrow$ proportion aléatoire d'échecs.

(*) Région critique K_α avec $\alpha = 0.05$.

On cherche p_α tel $\mathbb{P}[P_n < p_\alpha] = 0.05$

$p_\alpha = 0.179$; $K_\alpha = \{P_n \leq 0.179\}$

(*) Décision du test : $P_e = \frac{20}{100} = 0.2$

$0.2 \notin K_\alpha$: au niveau $\alpha = 0.05$, on conserve H_0.

La nouvelle méthode n'est pas plus efficace que l'ancieme.

2. A partir de 17 échecs. En effet si $n_e = 18$, alors $p_e = \frac{18}{100} = 0.18 \notin K_\alpha$, et si $n_e = 17$, alors $p_e = \frac{17}{100} = 0.17 \in K_\alpha$, et on accepte H_1.