TD 2
TEST BINOMIAL

• **Exercice 1.** $n = 21$ familles
16 réussites.

⊛ **Etape 1** : Hypothèses.

$\begin{cases} H_0 : \text{la crèche n'a pas d'effet sur la perception sociale des enfants.} \\ H_1 : \text{la crèche a un effet positif sur la perception sociale des enfants.} \end{cases}$

On note p la proportion d'enfants ayant été en crèche dont la perception sociale est supérieure à celle de leur jumeau.

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.5 . \\ H_1 : p > 0.5 \end{cases}$$

• **Etape 2** : Etablir la satistique du test : on travaille avec la loi binomiale, avec :

$$p_0 = 0.5 \qquad n = 21 .$$

On désigne par S_n le nombre de jumeaux ayant été en crèche sur un échantillon aléatoire $n = 21$ enfants, dont la perception sociale est meilleure que celle du jumeau resté à la maison : S_n est le nombre aléatoire de "succès".

$$S_n \hookrightarrow B(21, 0.5) .$$

Etape 3 : Détermination de la région critique K_α pour $\alpha = 0.05$.

$$K_\alpha = \{ S_n \geq k_\alpha \}$$

Dans L_1 : $k : 0, \dots, n-1$

L_2 : $\mathbb{P}[S_n \leq k-1]$

L_3 : $\mathbb{P}[S_n \geq k]$

Avec la calculette, on obtient :

$$\mathbb{P}[S_n \geq 15] = 0.039 < 0.05$$
$$\mathbb{P}[S_n \geq 14] = 0.095 > 0.05$$

Donc $\underline{K_\alpha = \{15, 16, 17, \dots, 21\}}$

Etape 4 . Décision du test : $n_e = 16$

$n_e \in K_\alpha$.

Conclusion : Au niveau $\alpha = 0.05$ (5%), on accepte l'hypothèse H_1 : la crèche a un effet favorable sur la perception sociale des enfants.

(*) p-value : probabilité de la région bordée par le résultat expérimental.

$$\mathbb{P}(\{16, 17, \dots, 21\})$$
$$= \mathbb{P}[S_n \geq 16] = 0.013$$

La p-value est petite, donc le test est significatif.

⊛ Puissance $\eta(0.7)$: c'est la probabilité que le test a d'accepter H_1 alors que H_1 est vraie.

En l'occurence $p = 0.7$ (> 0.5)

H_1 est vrai !

On calcule $\mathbb{P}[K_\alpha]$ en remplaçant $p_0 = 0.5$ par $p = 0.7$

$K_\alpha = \{S_n \geq 15\}$: on calcule

$\mathbb{P}[K_\alpha]$ avec $\mathcal{B}(21, 0.7)$. On a :

$$\mathbb{P}[K_\alpha] = \mathbb{P}[S_n \geq 15] = 1 - \underbrace{\mathbb{P}[S_n \leq 14]}_{\text{on calcule avec Bcd}}$$

$$= 1 - 0.449 = 0.551$$

$$\longrightarrow \eta(0.7) = 0.551$$

Si $p = 0.7$, le test a 55.1 % de chances d'accepter H_1.

Puissance $\eta(0.8)$. $\mathbb{P}[S_n \leq 14]$ avec $p = 0.8$

$$= 0.108$$

$$\eta(0.8) = 1 - \mathbb{P}[S_n \leq 14]$$
$$= 1 - 0.108 = 0.892$$

Si $p = 0.8$ le test a 89.2 % de chances d'accepter H_1.

• Exercice 2 :

① Hypothèses :

H_0 : Le nouveau médicament n'est pas plus efficace que l'ancien.

H_1 : Le nouveau médicament ~~est~~ est plus efficace que l'ancien.

p : la proportion de patients ayant vu une amélioration avec le nouveau médicament.

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 = 0.6 \\ H_1 : p > 0.6 \end{cases}$$

② <u>Statistique du test</u> : On note S_n le nombre aléatoire de succès $(n = 16)$. Sous l'hypothèse nulle :

$$S_n \hookrightarrow B(16, 0.6)$$

③ <u>Région critique avec</u> $\alpha = 0.05$.

Avec la calculette :

$$\mathbb{P}[S_n \geq 14] = 0.018 < 0.05$$
$$\mathbb{P}[S_n \geq 13] = 0.065 > 0.05$$

$$K_\alpha = [S_n \geq 14]$$

④ <u>Décision du test au niveau 0.05</u>

$n_e = 12 < 14$: $n_e \notin K_\alpha$: au niveau $\alpha = 0.05$ on conserve l'hypothèse H_0 (nouveau méd. pas plus efficace)

(*) <u>p-value du test</u> : $\mathbb{P}[S_n \geq 12] = 1 - \mathbb{P}[S_n \leq 11]$
$= 0.167$

* Puissance $\eta(0.75)$: $\mathbb{P}[K_\alpha ; B(16, 0.75)]$

$= \mathbb{P}[S_n \geq 14 ; B(16, 0.75)]$

$= 0.197$ $\hookrightarrow \mathbb{P}[S_n \leq 13]$

Sur CASIO : MENU STAT $\rightarrow$ Distribution

Binomial $\rightarrow$ Bcd $\rightarrow$ Variable

$\rightarrow X = 13 \rightarrow n = 16$

Save Res. $\rightarrow$ 1 - ce résultat.

. EXERCICE 3 $n = 24$, $p_0 = 0.54$.

(1) Hypothèses.

H_0 : prop. d'alexythymiques parmi les hypertendus est égale à 54 %

H_1 : prop. — — — supérieure à 54 %.

Soit p prop. d'alexythimiques parmi les hypertendus

H_0 : $p = 54\% = 0.54$

H_1 : $p > 0.54$.

2. Statistique du test : Sous l'hypothèse nulle, la variable aléatoire S_n : nombre d'alex. parmi les hyper. sur un échantillon aléatoire de taille $n = 24$ vérifie :

$$S_n \hookrightarrow B(24, 0.54)$$

3. Région critique K_α au niveau $\alpha = 0.05$.

$$\mathbb{P}[S_n \geq k] = 1 - \mathbb{P}[X \leq k-1]$$

$$\mathbb{P}[S_n \geq k] < 0.05 \Leftrightarrow \mathbb{P}[X \leq k-1] > 0.95$$

On constate sur la calculatrice que:

$$\begin{cases} \mathbb{P}[S_n \geq 18] = 0.029 \\ \mathbb{P}[S_n \geq 17] = 0.072 \end{cases}$$

où encore:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}[S_n < 17] < 0.95 \Rightarrow \mathbb{P}[S_n \geq 17] > 0.05 \\ \mathbb{P}[S_n < 18] > 0.95 \Rightarrow \mathbb{P}[S_n \geq 18] < 0.05 \end{array}\right\} \Rightarrow K_\alpha = \{S_n \geq 18\}$$

4. Décision du test : $n_e = 19 \in K_\alpha$. Donc au niveau $\alpha = 0.05$; on accepte l'hypothèse H_1.

⊛ p-value $= \mathbb{P}[S_n \geq 19]$
$= 1 - \mathbb{P}[S_n \leq 18]$
$= 0.0098$

puissance: $\eta\left(\frac{19}{24}\right) = \eta(0.792)$

$$\eta(0.792) = \mathbb{P}[S_n \geq 18 \,;\, B(24, 0.792)]$$
$$= 0.780 = 1 - \mathbb{P}[S_n \leq 17]$$

. Exercice 4 : Traité au tableau par Adrien MICHEL

Cet étudiant a traité l'exercice en considérant, à cause du cas d'égalité, qu'il n'y a que 16 participants au test.

On peut également considérer qu'il y a bien 17 participants au test, et que le cas d'égalité n'est pas un succès. Ce qui donne les résultats suivants au test binomial.

(*) Hypothèses : H_0 : la nouvelle molécule n'a pas d'effet particulier.
H_1 : la nouvelle molécule est efficace.

On désigne par p la proportion de personnes de la population dont le taux de cholestérol baisse sous l'action de la nouvelle molécule.

$$\begin{cases} H_0 : & p = p_0 \ (= 0.5) \\ H_1 : & p > p_0 \end{cases}$$

(*) Statistique du test. $n = 17$. Petit échantillon.
On sait alors que, sous l'hypothèse H_0, le nombre aléatoire S_n de patients dont le cholestérol baisse sous l'action de la nouvelle molécule vérifie :

$$S_n \hookrightarrow B(17, 0.5)$$

(*) Région critique K_α (au niveau d'erreur $\alpha = 0.05$).
On observe à la calculatrice que :

$$\mathbb{P}[S_n \geq 13] = 0.0245 \quad (< 0.05) \quad \text{et}$$

$$\mathbb{P}[S_n \geq 12] = 0.0717 \quad (> 0.05). \quad \text{Donc :}$$

$$K_\alpha = \{S_n \geq 13\}.$$

(*) Décision du test. Le résultat expérimental est $n_e = 11$. nombre de succès
n_e n'appartient pas à K_α, donc, au niveau $\alpha = 0.05$, on conserve H_0.