L2 - Psychologie - Groupe 6 - Corrigé du Premier contrôle

Novembre 2019

Exercice 1. En 1960, les psychologues Eleanor J. Gibson and Richard D. Walk de l'Université de Cornell ont conçu un dispositif, la "falaise visuelle", permettant de tester - sans risque de blessure - à quel point des enfants en bas-âge (âgés de moins de 14 mois) étaient capables de percevoir la sentation de profondeur, et de ressentir le vertige. Sur les 27 enfants testés par ce dispositif, 23 ont refusé de ramper sur le plexiglass transparent au-dessus de la face profonde du dipositif, manifestant ainsi une perception de la profondeur.

On se demande si on peut en déduire, au risque d'erreur $\alpha = 5\%$, que plus de 60% des enfants en bas-âge perçoivent la sensation de profondeur.

1. Hypothèses du test.
H_0. Seuls 60% d'enfants en bas-âge ont la sentation de profondeur.
H_1. Plus de 60% d'enfants en bas-âge perçoivent cette sentation.
Formulation mathématique. $p =$proportion d'enfants en bas-âge qui perçoivent la sentation de profondeur.
H_0. $p = p_0 = 0.6$
H_1. $p > p_0$.

2. Statistique du test. $n = 27$. Sous l'hypothèse nulle, le nombre aléatoire S_n d'enfants en bas-âge qui perçoivent la sensation de profondeur vérifie:

$$P_n \hookrightarrow \mathcal{B}(27, .6)$$

3. Région critique K_α au niveau $\alpha = 0.05$. On observe à la calculette que $\mathbb{P}[S_n \geq 21] = 0.042$ et $\mathbb{P}[S_n \geq 20] = 0.095$. Donc $K_\alpha = \{S_n \geq 21\}$.

4. Décision du test. Puisque $n_e = 23 \in K_\alpha$, on accepte au niveau $\alpha = 5\%$ l'hypothèse H_1 : plus de 60% des enfants ont bas-âge ont une sentation de la profondeur.

5. p-value du test et puissance $\eta\left(\frac{24}{27}\right)$. p-value$=\mathbb{P}[S_n \geq n_e] = \mathbb{P}[S_n \geq 23] = 0.005$.
$\eta\left(\frac{24}{27}\right) = \mathbb{P}\left[K_\alpha; \mathcal{B}\left(27, \frac{24}{27}\right)\right] = \mathbb{P}\left[S_n \geq 21; \mathcal{B}\left(27, \frac{24}{27}\right)\right] = 0.975$. Si la proportion d'enfants qui ont la sentation de profondeur est de $\frac{24}{27} = 88.9\%$, le test a 97.5% de chances d'accepter H_1.

Exercice 2. On cherche à déterminer si les enfants en bas âge ont une préférence pour une couleur. Pour cela, on fait une expérience avec un groupe de 250 enfants de 2 ans. Chaque enfant se voit proposer deux seaux, l'un rouge et l'autre vert et se doit de choisir l'un des deux. L'expérience donne le résultat suivant : sur les 250 enfants de l'échantillon, 140 ont choisi le seau rouge. Peut-on conclure avec un risque inférieur à 5% que les enfants de bas âge préfèrent la couleur rouge à la couleur verte ?

1. Hypothèses du test.
H_0. Les enfants en bas-âge aiment autant la couleur verte que la rouge.
H_1. Les enfants en bas-âge préfèrent la couleur rouge.
Formulation mathématique. p =la proportion d'enfants en bas-âge qui préfèrent la couleur rouge à la couleur verte.
H_0. $p = p_0 = 0.5$.
H_1. $p > p_0$.

2. Statistique du test. $n = 250 > 30$. $n \times p_0 = 125 > 5$ et $n \times q_0 = 125 > 5$. Donc, sous l'hypothèse H_0, la proportion aléatoire P_n d'enfants qui préfèrent la couleur rouge à la verte verifie :

$$P_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right) = \mathcal{N}\left(0.5, 0.0316\right).$$

3. Région critique K_α au niveau $\alpha = 0.05$. Sur la calculatrice, on trouve que la valeur p_α telle que $\mathbb{P}\left[P_n \geq p_\alpha ; \mathcal{N}\left(0.5, 0.0316\right)\right]$ est $p_\alpha = 0.552$. Donc $K_\alpha = \{P_n \geq 0.552\}$.

4. Décision du test. La valeur expérimentale est $p_e = \dfrac{140}{250} = 0.56 > p_\alpha$. Donc, au niveau $\alpha = 5\%$, on accepte l'hypothèse H_1 : les enfants en bas-âge préfèrent la couleur rouge à la couleur verte.

5. p-value du test et puissance $\eta\left(\frac{145}{250}\right)$. p-value$=\mathbb{P}\left[P_n \geq p_e\right] = \mathbb{P}\left[P_n \geq 0.56\right] = 0.029$. La puissance est :

$$\eta\left(\frac{145}{250}\right) = \eta\left(0.58\right) = \mathbb{P}\left[K_\alpha ; \mathcal{N}\left(0.58, \sqrt{\frac{0.58 \times 0.42}{250}}\right)\right] = \mathbb{P}\left[P_n \geq 0.0552 ; \mathcal{N}\left(0.58, 0.0312\right)\right],$$

donc $\eta\left(\frac{145}{250}\right) = 0.815$. Si le nombre d'enfants qui préfèrent un seau rouge est de 145, le test a 81.5% de chances d'accepter H_1.