L2 - Psychologie 2019-2020 - Deux exercices d'ajustement de moyenne et d'écart-type

Octobre 2019

Exercice 1. Le tableau suivant représente les résultats à un test de niveau d'un groupe d'élèves pris au hasard dans les classes de terminales d'un établissement scolaire, répartis en 5 classes :

Résultats	$[0,4[$	$[4,8[$	$[8,12[$	$[12,16[$	$[16,20]$
Effectifs	35	35	33	20	8

1. Calculer la moyenne m_{e} et l'écart-type s_{e} de cet échantillon.
2. Peut-on en déduire, avec un risque de 5% d'erreur, que l'écart-type des résultats de tous les élèves de terminale de cet établissement est significativement différent de 6 ?
3. Peut-on en déduire, avec un risque de 5% d'erreur, que le résultat moyen de tous les élèves de terminale de cet établissement est significativement inférieure à 8 ?
4. Pour la moyenne, calculer la puissance $\eta\,(7)$.

Exercice 2. Le test de Stroop évalue *l'attention sélective* chez l'enfant et l'adolescent. Les resultats de ce test auprès d'un échantillon de 27 enfants de moins de 10 ans sont les suivants :

Résultats	2	20	7	10	12	5	28	14	7	5	23	12	17	8	7	6	9	21	18	8	2	22	16	11	8	9	1

1. Calculer la moyenne m_{e} et l'écart-type s_{e} de ces résultats.
2. Peut-on en déduire, avec un risque de 5% d'erreur, que l'écart-type des résultats des enfants de moins de 10 ans est significativement supérieur à 6 ?
3. Peut-on en déduire, avec un risque de 5% d'erreur, que le résultat moyen des enfants de moins de 10 ans est significativement différent de 10 ?

Corrigé de l'Exercice 1. Le tableau suivant représente les résultats à un test de niveau d'un groupe d'élèves pris au hasard dans les classes de terminales d'un établissement scolaire, répartis en 5 classes :

Résultats	$[0,4[$	$[4,8[$	$[8,12[$	$[12,16[$	$[16,20]$
Effectifs	35	35	33	20	8

1. Calculer la moyenne m_e et l'écart-type s_e de cet échantillon. Cela se fait directement sur la calculatrice avec la commande 1-Var. On trouve $m_e = 7.893$ et $s_e = 4.826$.

   (a) Peut-on en déduire, avec un risque de 5% d'erreur, que l'écart-type des résultats de tous les élèves de terminale de cet établissement est significativement différent de 6 ? On procède à un test (bilatéral) d'ajustement d'écart-type.

   (a) Hypothèses. On désigne par σ l'écart-type des élèves de terminale de l'établissement scolaire. $H_0 : \sigma = \sigma_0 = 6$, $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$.

   (b) Statistiques. $n = 131$. On désigne par S_n l'écart-type d'un échantillon aléatoire de $n = 131$ élèves, et par $V_n = S_n^2$ la variance aléatoire. Alors, sous l'hypothèse nulle H_0, on a :

   $$Y_n = \frac{nV_n}{\sigma_0^2} = \frac{nS_n^2}{\sigma_0^2} \hookrightarrow \chi^2(n-1) \text{ c'est-à-dire } Y_n = \frac{131S_n^2}{36} \hookrightarrow \chi^2(130).$$

   (c) Région critique au niveau $\alpha = 5\%$. Puisque le test est bilatéral, on trouve deux valeurs $y_{\alpha,1}$ et $y_{\alpha,2}$ dans la table de χ^2, ligne 130, dans les colonnes $q = 0.025$ et $p = 0.025$. Donc $y_{\alpha,1} = 100.3$ et $y_{\alpha,2} = 163,5$. On a donc $K_\alpha = \{Y_n \leq 100.3\} \cup \{Y_n \geq 163.5\}$.

   (d) Décision du test. La valeur expérimentale est $y_e = \dfrac{131 \times 4.826^2}{36} \sim 84.751$. Cette valeur est appartient à K_α, donc, au niveau d'erreur $\alpha = 5\%$, on admet l'hypothèse H_1 : l'écart-type des résultats des élèves de terminale de l'établissement est significativement différent de 6.

   (b) Peut-on en déduire, avec un risque de 5% d'erreur, que le résultat moyen de tous les élèves de terminale de cet établissement est significativement inférieure à 8 ? On procède à un test unilatéral d'ajustement de moyenne.

      i. Hypothèses. On désigne par μ le résultat moyen des elèves de terminale de l'établissement. Alors :

      $$H_0 : \mu = \mu_0 = 8; \quad H_1 : \mu < \mu_0.$$

      ii. Statistique du test. On a $n = 131 > 30$, il s'agit donc d'un grand échantillon. Si on désigne par M_n le résultat moyen d'un échantillon aléatoire d'élèves de terminale de l'établissement, on a, sous l'hypothèse nulle : $M_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu_0, \dfrac{s_e}{\sqrt{n-1}}\right)$, c'est à dire $M_n \hookrightarrow \mathcal{N}(8, 0.423)$.

      iii. Région critique au niveau $\alpha = 5\%$. La région K_α est de la forme $K_\alpha = \{M_n \leq m_\alpha\}$, avec $\mathbb{P}[M_n \leq m_\alpha] = 0.05$. On trouve à la calculatrice $m_\alpha = 7.304$. Donc $K_\alpha = \{M_n \leq 7.304\}$.

      iv. Décision du test au niveau $\alpha = 0.05$. La valeur expérimentale est $m_e = 7.893$. Elle n'appartient donc pas à K_α : au niveau d'erreur 5%, on conserve l'hypothèse H_0, qui affirme que le résultat moyen des élèves de l'établissement est significativement égal à 8.

   (c) Pour la moyenne, calculer la puissance $\eta(7)$. On sait que $\eta(7) = \mathbb{P}\left[K_\alpha, \mathcal{N}\left(7, \dfrac{s_e}{\sqrt{n-1}}\right)\right] = \mathbb{P}[M_n \leq 7.304; \mathcal{N}(7, 0.423)] = 0.7635$. Donc, si le résultat moyen des élèves de terminale est 7, le test a 76.35% de chances d'accepter - avec raison - l'hypothèse H_1.

Corrigé de l'Exercice 2. Le test de Stroop évalue *l'attention sélective* chez l'enfant et l'adolescent. Les resultats de ce test auprès d'un échantillon de 27 enfants de moins de 10 ans sont les suivants :

Résultats	2	20	7	10	12	5	28	14	7	5	23	12	17	8	7	6	9	21	18	8	2	22	16	11	8	9	1

1. Calculer la moyenne m_e et l'écart-type s_e de ces résultats. Un calcul direct donne $m_e = 11.407$ et $s_e = 6.924$.
2. Peut-on en déduire, avec un risque de 5% d'erreur, que l'écart-type des résultats des enfants de moins de 10 ans est significativement supérieur à 6 ? On procède à un test d'ajustement dun écart-type.
   (a) Hypothèses. Soit σ l'écart-type des résultats des enfants de moins de 10 ans. Alors $H_0 : \sigma = \sigma_0\,(= 6)$ et $H_1 : \sigma > \sigma_0$.
   (b) Statistiques du test. Pour $n = 27$, soient S_n l'écart-type et V_n la variance d'un échantillon aléatoire de 27 enfants. Sous l'hypohèse nulle, on a, en supposant que la variable aléatoire "résultat" suit une loi normale :
   $$Y_n = n\frac{V_n}{\sigma_0^2} = n\frac{S_n^2}{\sigma_0^2} = \frac{27S_n^2}{36} \hookrightarrow \chi^2\,(26)\,.$$
   (c) Région critique au niveau $\alpha = 5\%$. Dans la table du χ^2, colonne $p = 005$, ligne 26, on trouve $y_\alpha = 38.89$. Donc $K_\alpha = \{Y_n \geq 38.89\}$.
   (d) Décision au niveau $\alpha = 5\%$. La valeur expérimentale est $y_e = \dfrac{27 \times 6.924^2}{36} = 35.957$. Puisque $y_e \notin K_\alpha$, on conserve l'hypothèse H_0 : on admet, avec un risque d'erreur 5%, que $\sigma = 6$.
3. Peut-on en déduire, avec un risque de 5% d'erreur, que le résultat moyen des enfants de moins de 10 ans est significativement différent de 10 ? On procède à un test d'ajustement d'une moyenne.
   (a) Hypothèses. On désigne par μ les résultats moyen des enfants de moins de 10 ans au test de Stroop. Alors :
   $$H_0 : \mu = \mu_0\,(= 10)\,; \quad H_1 : \mu \neq \mu_0.$$
   (b) Statistique du test. On $n = 27$. Il s'agit donc d'un petit échantillon. On sait alors que, sous l'hypothèse nulle, en désignant par M_n la moyenne et par S_n l'écart-type d'un échantillon aléatoire d'enfants de moins de 10 ans, on a : $T_n = \dfrac{M_n - \mu_0}{S_n/\sqrt{n-1}} = \dfrac{M_n - 10}{S_n/\sqrt{26}} \hookrightarrow \mathrm{St}\,(26)$.
   (c) Région critique au niveau $\alpha = 0.05$. On cherche une région bilatérale. Dans la table inverse de la loi de Student, on trouve, colonne $\alpha = 0.025$, ligne 26, on trouve $t_\alpha = 2.0555$. Donc $K_\alpha = \{T_n \leq -2.0555\} \cup \{T_n \geq 2.0555\}$.
   (d) Décision du test au niveau $\alpha = 0.05$. La valeur expérimentale est $t_e = \dfrac{m_e - \mu_0}{s_e/\sqrt{n-1}} = \dfrac{11.407 - 10}{6.924/\sqrt{26}} = 1.036$. Puisque $t_e \notin K_\alpha$, au risque d'erreur 5%, on conserve l'hypothèse H_0 : le résultat moyen des enfants est égal à 10.