FONCTIONS INJECTIVES, SURJECTIVES, FONCTIONS RÉCIPROQUES

1 Injections, surjections, bijections

On se donne une fonction réelle $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et deux ensembles $E, F \subseteq \mathbb{R}$, avec $E \subseteq \mathcal{D}_f$.

1. f est ***injective*** (ou bien f est une ***injection***) si tout élément de f a *au plus* un antécédent dans E. De façon équivalente, f est ***injective*** si l'égalité $f(x_1) = f(x_2)$ avec $x_1, x_2 \in E$ implique $x_1 = x_2$.
2. f est ***surjective*** (ou bien f est une ***surjection***) si tout élément de F a *au moins* un antécédent dans E. De façon équivalente, f est surjective si, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
3. f est ***bijective*** (ou bien f est une ***bijection***) si si tout élément de F, a exactement un antécédent dans E, c'est à dire si, pour tout $y \in F$, il existe *exactement un seul* $x \in E$ tel que $f(x) = y$. De façon équivalente f est ***bijective*** si f est à la fois une injection et une surjection.

Interprétation graphique des notions précédentes.

1. La fonction $f : E \to F$ est ***injective*** si, pour tout $b \in F$, la droite horizontale d'équation $y = b$ intersecte le graphe $\Gamma_{f,E}$ de f sur E en *au plus* point.
2. La fonction $f : E \to F$ est ***surjective*** si, pour tout $b \in F$, la droite horizontale d'équation $y = b$ intersecte le graphe $\Gamma_{f,E}$ de f sur E en *au moins* un point.
3. La fonction $f : E \to F$ est ***bijective*** si, pour tout $b \in F$, la droite horizontale d'équation $y = b$ intersecte le graphe $\Gamma_{f,E}$ de f sur E en *exactement* un point.

On voit également qu'une fonction $f\colon E \to F$ est bijective lorsque à tout élément $y \in F$ on peut associer *de façon unique* un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or, pouvoir associer de façon unique à tout élément d'un ensemble un élément d'un autre ensemble est exactement la définition d'une fonction. On en déduit :

Définition. Soit $f\colon E \to F$ une bijection. La fonction de F dans E qui a tout élément $y \in F$ associe l'unique élément x de E tel que $f(x) = y$ s'appelle l'***application réciproque*** de f. On la note en général f^{-1}. On a donc :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "f"] & F \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Remarque. Si $f\colon E \to F$ est une bijection, de bijection réciproque f^{-1}, on a par définition :

$$\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x \text{ et } \forall y \in F, f\left(f^{-1}(y)\right) = y.$$

Autrement dit :$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$, où Id_E est la fonction *identité* de E définie par $\mathrm{Id}_E(x) = x$ pour tout $x \in E$, et Id_F est définie de façon analogue sur F.

Proposition. *Soit $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to F \subseteq \mathbb{R}$ une bijection. Alors le graphe $\Gamma_{f^{-1}}$ de la fonction réciproque $f^{-1} : F \to E$ est le symétrique du graphe Γ_f de f par rapport à la "première diagonale" (qui est l'ensemble $\{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$.*

2 Lien avec la résolution des équations

Soit $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to F \subseteq \mathbb{R}$. Comment montrer, ***pratiquement***, que f est une injection, une surjection, ou une bijection? Cela revient à la question: *étant donné $y \in F$, combien de solutions l'équation $f(x) = y$ admet-elle de solutions ?* Ici, y est vu comme un ***paramètre*** de l'équation, et x comme l'***inconnue*** de l'équation.

1. Si, pour tout paramètre $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet *au plus* une solution $x \in E$, alors la fonction $f : E \to F$ est injective.
2. Si, pour tout paramètre $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet *au moins* une solution $x \in E$, alors la fonction $f : E \to F$ est surjective.
3. Enfin, si pour tout paramètre $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet *exactement* une solution $x \in E$, alors la fonction $f\colon E \to F$ est bijective.