CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS RÉELLES

1 Continuité

Notation. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. On désigne par I_{x_0} l'intervalle I ***épointé en*** x_0, c'est à dire l'ensemble $\{x \in I : x \neq x_0\}$.

Soient $f\colon\ ]a,b[\ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in\ ]a,b[$. On dit que f est ***continue au point*** x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Une fonction réelle $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite ***continue*** si elle est continue en tout point de $\mathcal{D}_f$.

Prop. 1. La somme, la différence et le produit de deux fonctions continues sur un intervalle sont également continues.
2. Le quotient d'une fonction continue par une fonction continue qui ne s'annule pas est continue.
3. La composée de deux fonctions continues est continue.
4. La réciproque d'une fonction continue bijective est continue.
5. Les fonctions $x \mapsto x^a$ $(a \in \mathbb{R})$, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus, et les fractions rationnelles sont continues sur leurs ensembles de définition.

Prop. Soient I_{x_0} un intervalle épointé en x_0 et $f\colon I_{x_0} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si les limites $\lim_{x \to x_0 -} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existent et sont égales au nombre $\ell \in \mathbb{R}$, alors la fonction définie sur I par

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est une fonction continue, appelée le **prolongement par continuité** de f en x_0.
Si $f\colon\ ]a,x_0[\ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et $\ell = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, alors la fonction obtenue comme précédemment en posant $f(x_0) = \ell$ est une fonction continue, appelée également le **prolongement par continuité** (à gauche) de f en x_0. On définit de la même façon le prolongement par continuité à droite.

Théorème des Valeurs Intermédiaires. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :*
(Formulation 1) *L'image $f(I)$ de f par la fonction f est un intervalle de $\mathbb{R}$.*
(Formulation 2) *Soient $a, b \in I$ tels que $a \leq b$. Alors, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$.*
(Formulation 3) Soient $a, b \in I$ tels que $a \leq b$. Alors la fonction $f\colon [a,b] \subseteq I \to [f(a), f(b)]$ est surjective.
(Formulation 4) *Cela reste vrai si a et b sont les extrémités de l'intervalle I, même si ces points n'appartiennent pas I ou si a ou b sont égaux à $\pm\infty$. Il faut alors remplacer $f(a)$ par $\ell = \lim_{x \to a^+} f(x)$ et $f(b)$ par $L = \lim_{x \to b^-} f(x)$ (si ces limites existent) : si $I =]a,b[$, alors, pour tout y strictement compris entre ℓ et L, il existe $x \in]a,b[$ tel que $f(x) = y$.*

Prop. *Soit $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue. Si $[a,b] \subseteq I$, et si $f(a) f(b) \leq 0$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = 0$.*
1. Si $I =]a,b[$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, si $\ell = \lim_{x \to a^+} f(x)$ et $L = \lim_{x \to b^-} f(x)$ existent, et si $\ell \cdot L < 0$, alors il existe $x \in]a,b[$ tel que $f(x) = 0$.
2. Si $]a,b[\ \subseteq I$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, si $\ell = \lim_{x \to a^+} f(x)$ et $L = \lim_{x \to b^-} f(x)$ existent, et si $\ell \cdot L < 0$, alors il existe $x \in]a,b[$ tel que $f(x) = 0$.
3. **(Théorème de la bijection)** *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et strictement monotone. Alors f induit une bijection de I sur $f(I)$. De plus, la bijection réciproque $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est continue sur $f(I)$, strictement monotone et de même sens de variation que f.*

Théorème 1.1. *Soit $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction f est bornée. De plus, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0)$ soit la plus petite valeur de f sur $[a,b]$ et il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $f(x_1)$ soit la plus grande valeur de f sur $[a,b]$.*

2 Dérivabilité

Définition 2.1. Soient $]a,b[\ \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in\ ]a,b[$ et $f\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$.

On dit que f est ***dérivable au point*** x_0 si

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe dans $\mathbb{R}$. On note alors $f'(x_0)$ ce nombre, qu'on appelle ***dérivée de*** f ***en*** x_0***.***
La fonction f est dite ***dérivable sur*** $]a,b[$ si f est dérivable en tout point de $]a,b[$. La fonction f'définie sur $]a,b[$ par par $x\mapsto f'(x)$ s'appelle la ***fonction dérivée*** de f.

Soit $f\colon [x_0,b[\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est ***dérivable à droite au point*** x_0 si

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe dans $\mathbb{R}$. On note alors cette $f'_{\mathrm{d}}(x_0)$ cette limite, qu'on appelle la ***dérivée à droite de*** f ***au point*** x_0.
On définit de façon analogue la ***dérivée à gauche*** $f'_{\mathrm{g}}(x_0)$.

Soient $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervalle et $f\colon I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f admet un ***maximum local*** (*resp.* un ***minimum local***) au point $c\in I$ s'il existe $r>0$ tel que, pour tout $x\in I\cap[c-r,c+r]$, $f(x)\le f(c)$ (*resp.* $f(x)\ge f(c)$). Dans les deux cas, on dit que f admet un ***extremum local*** au point c.

Prop. *Soit $f:\ ]a,b[\ \to\mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un extremum local en un point $c\in\ ]a,b[$, alors $f'(c)=0$.*

Prop. Soient $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervalle, $f\colon I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction *deux fois dérivable*, et soit $c\in I$ tel que Alors :
1. Si $f''(c)<0$, la fonction f admet un maximum local au point c.
2. Si $f''(c)>0$, la fonction f admet un minimum local au point c.

Prop. *Si la fonction $f\colon\ ]a,b[\ \subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable au point $x_0\in\ ]a,b[$, alors f est continue au point x_0. Attention, la réciproque n'est pas vraie.*
Soit $f\colon\ ]a,b[\ \subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $x_0\in\ ]a,b[$. Alors la droite d'équation $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ s'appelle la ***droite tangente*** au graphe Γ_f de f au point d'abscisse x_0.
Les fonctions $f_a\colon x\mapsto x^a$ $(a\in\mathbb{R})$, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus, et les fractions rationnelles sont dérivables sur leur domaine de définition. On a :

$$f'_a(x)=ax^{a-1},\quad \exp'(x)=\exp(x),\quad \ln'(x)=\frac{1}{x},$$

$$\sin'(x)=\cos(x),\quad \cos'(x)=-\sin(x)$$

Soient $f,g\colon\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors :
1. la somme, la différence et le produit de f et g sont dérivables et :

$$(f+g)'=f'+g',\quad (f-g)'=f'-g',\quad (fg)'=f'g+fg'.$$

2. si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2};\ \text{en particulier :}\ \left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{-g'}{g^2}.$$

3. Si $f\colon\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et g sont deux fonctions dérivables telle que la composée $g\circ f$ est bien définie sur $\mathcal{D}$, alors $g\circ f$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et, pour tout $x\in\mathcal{D}$;

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x).$$

4. Si $f\colon I\to J$ est une bijection dérivable, alors l'application réciproque f^{-1} est également dérivable pour tout point $x\in J$ tel que $f'\left(f^{-1}(x)\right)\neq 0$ et, pour tout $x\in J$, on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Prop. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :*
1. Si $f'(x)\ge 0$ (resp. $f'(x)>0$) pour tout $x\in I$, alors f est croissante sur I (resp. strictement croissante sur I).
2. Si $f'(x)\le 0$ (resp. $f'(x)<0$) pour tout $x\in I$, alors f est décroissante sur I (resp. strictement décroissante sur I).
3. Si $f'(x)=0$ pour tout $x\in I$, alors f est constante sur I.