TD - Continuité et dérivabilité

Exercice 1. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont prolongeables par continuité en 0 ?

1. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, pour $x \neq 0$.
2. $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, pour $x \neq 0$.
3. $h(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, pour $x \neq 0$.
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1+x^n}}{x^n}$, pour $x \neq 0$, à discuter en fonction de $m, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - 1 - \ln|x|$.

1. Calculer les limites de f en 0, en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Etablir si f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 3. Montrer que l'équation $x(1+\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x$ admet une unique solution réelle dans $[0,1]$.

Exercice 4. Montrer que l'équation $\dfrac{x}{2} - \sin x + \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$ admet dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ exactement une solution strictement négative et une solution strictement positive.

Exercice 5. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^{40} + x - 10^{-40} = 0$ et $0 < x < \frac{1}{10}$.

Exercice 6. Déterminer (sans les calculer) le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle I dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2 - 16$, $I =]0, +\infty[$.
2. $f(x) = x^2 - 160$, $I =]-\infty, 0[$.
3. $f(x) = x^3 - \sqrt{\pi}$, $I =]0, +\infty[$.

Exercice 7. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\sin(x)\cos(x), \quad (3x+2)^6, \quad \cos(-2x+1), \quad 3x\mathrm{e}^{\cos x}, \quad \ln\left(x^2+1\right), \quad \sqrt{\cos(x)+2}, \quad \sin\left(x^2\right), \quad \sin(3x)\cos(7x)$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}, \quad \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}, \quad \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^7}, \quad \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}\right), \quad \exp\left(\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right), \quad \sin\left(\sqrt{x^2+1}\right), \quad \sqrt{1+\ln x}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^3-x^2+1}}, \quad \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \ln(\sin(\mathrm{e}^x)), \quad \exp(\sin(\ln x)).$$

(*question subsidiaire : on tentera également de déterminer les domaines de définition des fonctions ci-dessus*)

Exercice 8.

1. Rappeler les définitions de fonctions cosh et sinh.
2. Montrer que $\cosh' = \sinh$ et que $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.

Exercice 9. Soit $f\colon x \in]0,1] \mapsto f(x) = x\ln x \in \mathbb{R}$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que f est décroissante et négative sur l'intervalle $]0, 1/\mathrm{e}[$. En déduire que f admet une limite ℓ en 0^+.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f\left(x^2\right) = 2xf(x)$. En déduire la valeur de ℓ en passant à la limite (*sans supposer cette limite déjà connue !*).

Exercice 10. Soit $h\colon\ ]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ défini par $h(u) = \ln(1+u) - u$.

1. Déterminer les limites de h aux bornes de son intervalle de définition.
2. Faire l'étude des variations de la fonction h.
3. Vérifier que, pour tout $u > -1$: $\ln(1+u) \leq u$.

Exercice 11. Soit $x > 0$.

1. Montrer que :
$$-\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$
2. Montrer que
$$\frac{1}{x+1}\leq\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{x}.$$
3. En déduire que
$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\leq \mathrm{e}\leq\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}.$$
4. Vérifier que les fonctions $f,g\colon\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définies par $f(x)=x\ln(1+1/x)$ et $g(x)=(x+1)\ln(1+1/x)$ sont respectivement croissante et décroissante.
5. Montrer qu'il en est de même des fonctions $F,G\colon\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définies par $F(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}$ et $G(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$.
6. Déterminer les limites des fonctions f,g,F,G en 0^+ et $+\infty$.
7. Montrer que $2\leq\mathrm{e}\leq 4$.
8. Montrer que
$$0\leq\mathrm{e}-\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\leq\frac{4}{x},$$
et en déduire une fraction rationnelle qui approche e à 10^{-2} près.