DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS, FORMULE DE TAYLOR, DÉVELOPPEMENT LIMITÉS GÉNÉRALISÉS

1 Développements limités et formule de Taylor

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon I_{x_0} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un ***développement limité à l'ordre*** n ***en*** x_0 s'il existe un polynôme P_n (appelé ***polynôme de Taylor***) de degré inférieur ou égal à n et une fonction ε qui tend vers 0 à l'origine tels que, pour tout x au voisinage de x_0 :

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

où $\varepsilon(x - x_0)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. On note $o((x - x_0)^n)$ pour $(x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$.
En général, on écrit $P_n(x)$ sous la forme :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n, \, a_k \in \mathbb{R}.$$

Théorème (Formule de Taylor). *Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si la fonction f et toutes ses dérivées existent et sont continues sur I, alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, donné par :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Les coefficients a_k du polynôme de Taylor sont donc donnés par $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Rem. Si la fonction f admet un développement limité à l'ordre n au point x_0, ce développement est ***unique***.
Le développement limité à l'ordre n en $x_0 = 0$ des fonctions classiques est donné dans le cours détaillé et dans le formulaire.

On considère deux fonctions f et g définies sur un voisinage I de $0 \in \mathbb{R}$, admettant toutes les deux un développement limité d'ordre n à l'origine :

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n), \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n).$$

Alors :

1. La ***somme*** $f + g$ admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est la somme de ceux de f et g.
2. Le ***produit*** fg admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le produit P_nQ_n.
3. Si $f(0) = 0$, alors la ***composée*** $g \circ f$ admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le polynôme composé $Q_n \circ P_n$.
4. Si f est n fois dérivable sur I, alors la ***dérivée*** de f admet un développement limité d'ordre $n - 1$ en 0, dont le polynôme de Taylor est la dérivée de celui de f :

$$f'(x) = P_n'(x) + o\left(x^{n-1}\right).$$

5. Toute ***primitive*** de f admet un développement limité d'ordre $n + 1$ en 0, dont le polynôme de Taylor est une primitive de celui de f.
6. Pour calculer le développement limité en 0 à l'ordre n de l'***inverse*** d'une fonction, on se ramène en général à calculer l'inverse d'un développement $1 + R_n(x) + o(x^n)$, où R_n est un polynôme de degré n tel que $R_n(0) = 0$. On applique pour cela le développement limité de $\dfrac{1}{1+u}$ en posant $u = R_n(x) + o(x^n)$. Le développement limité de $\dfrac{1}{1 + R_n(x) + o(x^n)}$ est donc $S_n(x) + o(x^n)$, où $S_n(x)$ est obtenu en gardant les termes d'ordre inférieur ou égal à n dans :

$$1 - R_n(x) + R_n^2(x) - R_n^3(x) + \cdots + (-1)^n R_n^n(x).$$

Rem. Le développement limité de f à l'ordre n en x_0 s'obtient généralement en posant $x = x_0 + X$, et en développant $F(X) = f(x_0 + X)$ à l'ordre n en 0.

Prop. Si $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet au point $x_0 \in I$ le développement limité $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$, avec $a_n \neq 0$, alors :
1. la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ est tangente au graphe Γ_f de la fonction f au point d'abscisse x_0.
2. De plus :
a) si n est pair : si $a_n > 0$, la courbe Γ_f est localement "au-dessus" de sa tangente; si $a_n < 0$, la courbe Γ_f est localement "en-dessous" de sa tangente;
b)si n est impair, la courbe Γ_f "traverse" sa tangente au point $(x_0, f(x_0))$: on dit que ce point est un ***point d'inflexion***.

2 Développements limités généralisés, développements généralisés à l'infini

Soit $f : \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.
1. On dit que f admet un ***développement limité généralisé en un point*** $x_0 \in \mathbb{R}$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ si :

$$f(x) = \frac{b_p}{(x - x_0)^p} + \frac{b_{p-1}}{(x - x_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{b_1}{x - x_0} + a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

au voisinage de x_0. On parle aussi de développements limités généralisés à droite et à gauche de x_0.
2. Si $\mathcal{D}_f$ contient un intervalle $]a, +\infty[$, on dit que f admet un ***développement généralisé en*** $+\infty$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ si

$$f(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

au voisinage de $+\infty$ (c'est à dire pour x assez grand). On a la définition analogue au voisinage de $-\infty$.

Rem. 1. Pour obtenir un développement limité (généralisé ou non), on pose $x = x_0 + h$, en utilisant les déloppements limités classiques quand h tend vers 0.
2. Pour obtenir un développement limité généralisé au voisinage de l'infini, on pose $X = \frac{1}{x}$, et on utilise les développements limités classiques quand X tend vers 0.
3. Dans les deux cas, le resultat final doit être exprimé en la variable x (c'est à dire à l'aide de puissances positives ou négatives de $(x - x_0)$ dans le premier cas, et à l'aide de puissances positives ou négatives de x dans le deuxième cas).

Déf. Si $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet en $\pm\infty$ le développement limité généralisé :

$$f(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

on dit que la courbe d'équation $y = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}$ est ***asymptote au graphe de*** f ***à l'ordre*** n en $\pm\infty$. En particulier, si :

$$f(x) = b_1 x + b_0 + o(1),$$

on dit que le graphe de f admet en $\pm$ l'***asymptote oblique*** d'équation $y = b_1 x + a_0$.