L1 – Math1A
TD – Fonctions injectives, surjectives, bijectives et applications réciproques

Exercice 1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln\left(|x| + \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

1. La fonction f est-elle injective ?
2. La fonction f est-elle surjective ?
3. Montrer que la restriction $g\colon\ [0, +\infty[\ \to [-1, +\infty[$ (définie par $g(x) = f(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$) est une bijection et calculer sa fonction réciproque.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$.

1. Est-elle injective ? Surjective ?
2. Montrer que le graphe de f est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $\{x = 1\}$.
3. Soit $g\colon\ ]1, +\infty] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = f(x)$ pour $x \in]1, +\infty]$. Est-elle injective ? Surjective ?
4. Soit $h\colon\ [2; +\infty[\ \to]0, 1]$ la fonction définie par $h(x) = f(x)$ pour $x \in [2, +\infty[$. Montrer que h est bijective et calculer sa réciproque.

Exercice 3.

1. Soit $f\colon\ [1, +\infty] \to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2 - 1$ est-elle bijective ?
2. Même question pour la fonction $g\colon \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$.

Dans les deux cas, si la réponse est positive, calculer l'application réciproque.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |x - 3| - |2x + 1|$.

1. Simplifier l'expression de $f(x)$ et dessiner le graphe de f.
2. Déterminer l'image de la fonction f.
3. La fonction f est-elle injective ? Surjective sur $\mathbb{R}$?
4. Déterminer deux intervalles $I \subseteq \mathbb{R}$ et $J \subseteq \mathbb{R}$ tels que la restriction $g = f|_I\colon I \to J$ soit bijective. Calculer la fonction réciproque de g.

Exercice 5. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
2. Montrer que le graphe de f est symétrique par rapport au point $(0, 1)$.
3. Pour $y \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre d'antécédents de y par f (sans les calculer). En déduire l'ensemble image $f(\mathcal{D}_f)$.
4. Pour $y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, calculer la somme et le produit des antécédants de y par f. En déduire que la restriction $g = f|_{[1,+\infty[}\colon\ [1, +\infty[\ \to \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ est une bijection, donc on déterminera la fonction réciproque.