

## TD - Primitives et surfaces

**Exercice 1** (changement de variables ou transformation élémentaire). Calculer les primitives suivantes :

$$\int x\sqrt{5+x^2}dx, \quad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx, \quad \int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx, \quad \int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos^2(x)}.$$

**Exercice 2** (intégration par parties). Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx, \quad \int x^2 \cos x dx, \quad \int \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} e^{\tan x} dx$$

**Exercice 3** (Maniement du trinôme  $ax^2 + bx + c$ ). Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{x+3}{x^2-5x-6}dx, \quad \int \frac{x-3}{x^2-4x+6}dx.$$

**Exercice 4.** Calculer les primitives suivantes, pour lesquelles on suggère parfois un changement de variable :

$$\int \frac{dx}{\sin x} \ (u = \cos x), \quad \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx \ (u = \cos x), \quad \int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} \ (t = \tan(x)), \quad \int \sin 5x \sin 3x dx.$$

**Exercice 5.** On rappelle que la fonction  $\sinh$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

1. Montrer que  $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une bijection, dont on note  $\operatorname{argsh}$  la bijection réciproque.
2. Montrer que  $\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
3. En déduire  $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$ .

**Exercice 6** (Fonctions irrationnelles). Calculer les primitives suivantes :

1.  $\int \frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx$ . On pourra poser  $u = x^{\frac{1}{4}}$ .
2.  $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$ . On pourra poser  $u = \sqrt{x+4}$ .

**Exercice 7** (Surfaces). 1. Calculer la surface délimitée par l'axe  $Ox$  et le graphe de la fonction  $f: x \mapsto x^2e^x$  entre le point où  $f$  atteint son maximum et le point où  $f$  s'annule.

2. Calculer, en passant à la limite quand  $x$  tend vers  $-\infty$ , la surface délimitée par l'axe  $Ox$  et le graphe de la fonction précédente, à gauche du point où  $f$  s'annule.

3. Calculer la surface délimitée par le graphe de la fonction  $f: x \mapsto \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ , l'axe  $Oy$ , et les deux droites horizontales d'équations  $y = f\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $y = f(1)$ .

4. Calculer la surface de l'ellipse de grand diamètre 5 et de petit diamètre 3.