PRIMITIVES ET INTÉGRALES

Une ***primitive*** d'une fonction $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction $F\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.
Une primitive de f est notée $\int f$ ou $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Ex :

$$\int \exp(x)\,\mathrm{d}x = \exp(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Soit $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f admet une primitive sur I.
Si F est une primitive de f, alors, pour tout nombre $C \in \mathbb{R}$, $F + C$ est également une primitive de f.
Soit F une primitive de f. Alors toute primitive de f est de la forme $F + C$ pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}$.

LES PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES SE TROUVENT DANS LE FORMULAIRE

Changement de variable. On se donne deux fonctions f et g. On suppose que f admet une primitive F et que g est dérivable. Alors

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C.$$

Intégration par parties. Soient f et g deux fonctions dérivables. Alors :

$$\int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Linéarité de l'intégrale. *Soient f, g deux fonctions réelles et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\int (af(x) + bg(x))\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primitives de fractions rationnelles.

1. ***Pôle simple*** :

$$\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

   Cela se voit en procédant au changement de variables $t = x - a$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

2. ***Pôle d'ordre supérieur*** :

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C,\ \ C \in \mathbb{R},\ \ n \neq 1.$$

   Là encore, cela se retrouve grâce au changement de variable $t = x - a$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

3. ***Dénominateur de degré* 2 :** $f(x) = \dfrac{Ax+B}{ac^2+bx+c}$. Plutôt que de donner des formules générales, impossibles à retenir, nous expliquons la méthode générale sur des exemples.

4. ***Dénominateur de degré* 2 *élevé à une puissance entière*** :$f(x) = \dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+C)^n}$, $n \geq 1$.

Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles.

1. Si $f(x) = F(\cos x, \sin x)$ est une fraction rationnelle en les variables $\cos x$ et $\sin x$ (c'est à dire est obtenue à partir de $\cos x$ et $\sin x$ à l'aide des quatre opérations : somme, différence, produit, quotient), alors :
   (a) si $f(-x) = -f(x)$, on pose $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$.
   (b) si $f(\pi - x) = -f(x)$, on pose $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x$.
   (c) si $f(\pi + x) = f(x)$, on pose $t = \tan x$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \left(1 + \tan^2 x\right) \mathrm{d}x = \left(1 + t^2\right) \mathrm{d}x$.
   (d) Si on ne voit aucune de ces symétries, on peut poser $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, et donc
$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \ \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \ \tan x = \frac{2u}{1-u^2}, \ \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$
2. Si $f(x) = F(\mathrm{e}^x, \cosh x, \sinh x, \tanh x)$ où F est une fraction rationnelle, on pose $t = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ (et donc $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}$) pour se ramener en une fraction rationnelle en t.
3. Si $f(x) = F\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$, on pose $u = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.
4. Si $f(x) = F\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, on transforme la racine carrée en l'une des formes :
   (a) $\sqrt{t^2+1}$: on pose $t = \sinh u$ et donc $\mathrm{d}t = \cosh u$ et $\sqrt{t^2+1} = \cosh u$.
   (b) $\sqrt{t^2-1}$: on pose $t = \pm\cosh u$ $(u > 0)$, $\mathrm{d}t = \pm\sinh u$ et $\sqrt{t^2-1} = \sinh u$.
   (c) $\sqrt{1-t^2}$: on pose $t = \sin u$, $\mathrm{d}t = \cos u$ et $1 - t^2 = \cos^2 u$.

$f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. L'***intégrale*** de f sur l'intervalle $[a,b]$ est l'aire du domaine du plan situé entre le graphe de f et l'axe des abscisses, comptée positivement pour la partie située au-dessus de l'axe des abscisses et négativement pour la partie située en-dessous de l'axe des abscisses. Ce nombre est noté :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Rem. Puisque l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a,b]$ peut être un nombre positif ou négatif, on parle de *l'aire algébrique* sous le graphe de f sur l'intervalle $[a,b]$.

Soient $f, g\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et soit $c \in]a,b[$. Alors :

1. On a la relation de linéarité :
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Si $f \leq g$ (c'est à dire si $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a,b]$), on a :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. On a la **relation de Chasles** :$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE. *Soit $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit F une primitive de f. Alors :*

1. La fonction $g\colon x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $]a,b[$ et $g'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a,b[$.

2. On a :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$