LIMITES DES FONCTIONS

1 Limites, définitions

Notation. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. On désigne par I_{x_0} l'intervalle I ***épointé en*** x_0, c'est à dire l'ensemble $\{x \in I : x \neq x_0\}$.

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, x_0 un élément de I et $f\colon I_{x_0} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f ***a pour limite*** ℓ ***quand*** x ***tend vers*** x_0 (ou que $f(x)$ ***tend vers*** ℓ ***quand*** x ***tend vers*** x_0) si, pour tout $r > 0$, il existe un nombre $h > 0$ tel que :

$$x \in I_{x_0} \text{ et } |x - x_0| < h \Longrightarrow |f(x) - \ell| < r.$$

On écrit :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

1. Soit $f\colon\ ]a, x_0[\ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f ***tend vers*** ℓ ***quand*** x ***tend vers*** x_0 ***à gauche***, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ si, pour tout $r > 0$, il existe $h > 0$ tel que $a < x_0 - h$ et :
$$x_0 - h < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - \ell| < r.$$
2. Soit $f\colon\ ]x_0, b[\ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f ***tend vers*** ℓ ***quand*** x ***tend vers*** x_0 ***à droite***, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ si, pour tout $r > 0$, il existe $h > 0$ tel que $x_0 + h < b$ et :
$$x_0 < x < x_0 + h \Longrightarrow |f(x) - \ell| < r.$$

1. Soit $f\colon\ ]a, x_0[\ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ ***tend vers*** $+\infty$ ***quand*** x ***tend vers*** x_0^- (*resp.* $f(x)$ ***tend vers*** $-\infty$ ***quand*** x ***tend vers*** x_0^-) si, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $h > 0$ tel que $a < x_0 - h$ et :
$$x_0 - h < a < x_0 \Longrightarrow A < f(x) \ \ (\textit{resp.}\ f(x) < A).$$
2. Soit $f\colon\ ]x_0, b[\ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ ***tend vers*** $+\infty$ ***quand*** x ***tend vers*** x_0^+ (*resp.* $f(x)$ ***tend vers*** $-\infty$ ***quand*** x ***tend vers*** x_0^+) si, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $h > 0$ tel que $x_0 + h < b$ et :
$$x_0 < x < x_0 + h \Longrightarrow A < f(x) \ \ (\textit{resp.}\ f(x) < A).$$

Dans les deux cas, on dit que le graphe Γ_f de f présente une ***asymptote verticale*** au point $x = x_0$.

Soit $f\colon\ ]a, +\infty[\ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si, pour tout $r > 0$, il existe $A > a$ tel que :
$$x > A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < r.$$
2. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, si pour tout $B \in \mathbb{R}$, il existe $A > a$ tel que :
$$x > A \Longrightarrow f(x) > B.$$
3. On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, si pour tout $B \in \mathbb{R}$, il existe $A > 0$ tel que :
$$x > A \Longrightarrow f(x) < B.$$

2 Limites, propriétés

Proposition.

1. Si une fonction a une limite (ou une limite à droite ou à gauche) en un point, cette limite est unique. On peut donc parler de "la" limite (ou de "la" limite à droite ou à gauche) d'une fonction en un point.
2. Soient $f, g\colon I_{x_0} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que $f \leq g$ sur I_{x_0}, c'est à dire telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I_{x_0}$. On suppose que les fonctions f et g admettent une limite quand x tend vers x_0. Alors :
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$
3. On considère trois fonctions f, g, et h définies sur l'intervalle épointé $I_{x_0} \subseteq \mathbb{R}$ telles que $f \leq g \leq h$ sur I_{x_0} (c'est à dire telle que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in I_{x_0}$). On suppose que f et h ont la même limite ℓ quand x tend vers x_0. Alors $g(x)$ tend également vers ℓ quand x tend vers x_0.

Proposition. *Soient $f, g\colon I_{x_0} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = k$. Ici $\ell, k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On a :*

1. $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell + k$; $\lim_{x \to x_0} (f(x)\, g(x)) = \ell \times k$.
2. *Si* $f(x) \neq 0$ *pour* $x \in I_{x_0}$, $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$.

3 Limites classiques

Proposition. ($\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0^\pm} (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\alpha} \ (\textit{pour } \alpha \in \mathbb{R}),$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0^\pm} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \ (\textit{pour } a > 0), \quad \lim_{x\to 0^\pm} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}.$$

Proposition (comparaison exponentielle, puissances, logarithme).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^a} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0, \quad (a>0)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x x^a = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x)\, x^a = 0, \quad (a>0)$$

4 Fonctions équivalentes

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit que deux fonctions réelles sont ***équivalentes*** quand x tend vers x_0, et on note $f \underset{x_0}{\sim} g$ (ou $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$), si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$.
Si $f \underset{x_0}{\sim} g$, et si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, alors $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

Proposition. *On considère deux fonctions réelles f et g.*

1. *Soient f et g deux fonctions qui tendent vers l'infini quand x tend vers x_0, telles que f domine g au voisinage de x_0, c'est à dire que* $\dfrac{g(x)}{f(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$. *Alors* $f+g \underset{x_0}{\sim} f$.
2. *Soient f_1 et g_1 deux fonctions réelles telles que $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$, alors $f \cdot g \underset{x_0}{\sim} f_1 \cdot g_1$ et* $\dfrac{f_1}{g_1} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{f_2}{g_2}$. *En particulier,* $\dfrac{1}{g_1} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{1}{g}$.

Remarque. Dans la détermination de la limite d'une *somme* de deux fonctions, contrairement au cas des produits ou des quotients, *on ne peut pas remplacer l'une des fonctions par une fonction équivalente*