TD - Limites et continuité

Exercice 1. Calculer (si elles existent) les limites suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}, \quad \lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\right), \quad \lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^n-1} \text{ (où } n \in \mathbb{N}).$$

Exercice 2. Etudier les limites quand x tend vers $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}.$$

Exercice 3. Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to \pm\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin(x), \quad \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x}\sin(x), \quad \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} x\cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cos(x), \quad \lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 4. Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right), \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{2^x-\cos x}{x}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}+\sin(x)}{\ln(x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2\ln(1+2x)}{2\sin x(\cos(3x)-1)}.$$

Exercice 5. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont prolongeables par continuité en 0 ?

1. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, pour $x \neq 0$.
2. $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, pour $x \neq 0$.
3. $h(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, pour $x \neq 0$.
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1+x^n}}{x^n}$, pour $x \neq 0$, à discuter en fonction de $m, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - 1 - \ln|x|$.

1. Calculer les limites de f en 0, en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Etablir si f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 7. Montrer que l'équation $x(1+\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x$ admet une unique solution réelle dans $[0,1]$.

Exercice 8. Montrer que l'équation $\dfrac{x}{2} - \sin x + \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$ admet dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ exactement une solution strictement négative et une solution strictement positive.

Exercice 9. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^{40} + x - 10^{-40} = 0$ et $0 < x < \frac{1}{10}$.

Exercice 10. Déterminer (sans les calculer) le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle I dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2 - 16$, $I =]0, +\infty[$.
2. $f(x) = x^2 - 160$, $I =]-\infty, 0[$.
3. $f(x) = x^3 - \sqrt{\pi}$, $I =]0, +\infty[$.