

TD - Etude de fonctions réelles

Il s'agit de faire l'étude complète des fonctions suivantes : domaine de définition, symétries éventuelles, sens de variation, limites, asymptotes et position du graphe par rapport aux asymptotes, à l'aide des développements généralisés.

Exercice 1. Etudier la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Exercice 2. Etudier la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x$.

Exercice 3. Etudier la fonction

$$f: x \mapsto -\frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$$

Exercice 4. Etudier la fonction $f: x \mapsto x^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$. En particulier :

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
3. Calculer le développement limité de f au point 1 à l'ordre 2.
4. En déduire que f est prolongeable par continuité, et même dérivable, au point 1.
5. On pose $h(x) = -\ln(x) + 2\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.
 - (a) Calculer $h'(x)$.
 - (b) En déduire que, pour tout $x > 0$ avec $x \neq 1$, $h(x) < 0$.
6. En déduire que f est strictement décroissante sur $]0 + \infty[$.
7. Montrer que pour tout $x > 0$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = xf(x)$.
8. En déduire que $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.