

L1 - Math1A

TD - Développements limités

Exercice 1 (sommes et produits de DL). Calculer les développements limités au point 0 :

$$\frac{1}{1-x} - e^x \text{ à l'ordre 3, } \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \text{ à l'ordre 4, } \sin x \cos(2x) \text{ à l'ordre 5}$$

Exercice 2 (composition de DL). Calculer les développements limités au point 0 :

$$e^{\sin x} \text{ à l'ordre 4, } (\cos x)^{\sin x} \text{ à l'ordre 5.}$$

Exercice 3 (division de DL). Calculer les développements limités au point 0 :

$$\frac{1}{1+x+x^2} \text{ à l'ordre 4, } \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1} \text{ à l'ordre 2.}$$

Exercice 4 (DL divers). Calculer les développements limités au point 0 :

$$(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \text{ à l'ordre 2, } (1 - \cos x) \ln(1+x) \text{ à l'ordre 3.}$$

En déduire l'équation de la tangente au graphe de ces fonctions au point d'abscisse 0, et la position du graphe par rapport à cette tangente.

Exercice 5. A l'aide d'équivalents ou de développements limités convenables, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{2x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x \cos x^2)}{4x}.$$

Exercice 6 (développements limités hors de 0). Calculer les développements limités suivants au point x_0 :

$$\sqrt{x} \text{ à l'ordre 2, } x_0 = 2, \quad \sin x \text{ à l'ordre 3, } x_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \cos x \text{ à l'ordre 3, } x_0 = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\ln x}{(1+x)} \text{ à l'ordre 2, } x_0 = 1.$$

En déduire l'équation de la tangente au graphe de ces fonctions au point d'abscisse x_0 , et la position du graphe par rapport à cette tangente.

Exercice 7 (DL généralisés, en $\pm\infty$). Calculer les développements limités généralisés :

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \text{ en } +\infty \text{ à l'ordre 3, } \frac{x}{x-1} \sqrt{x^2+1} \text{ en } -\infty \text{ à l'ordre 1, } \frac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{2-x+x^2}}{x} \text{ en } +\infty \text{ à l'ordre 2,}$$

et en déduire les équations des asymptotes et la position des graphes par rapport aux asymptotes.

Exercice 8. On considère la fonction $f: x \mapsto x + \sqrt{x^2+x}$.

1. Ecrire le développement limité de $\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 3.
2. En déduire le développement limité de $f(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$ à l'ordre 2.
3. Ecrire les équations des asymptotes au graphe Γ_f en $-\infty$ et $+\infty$ et la position du graphe par rapport à ces asymptotes.