TD - Dérivées et sens de variation des fonctions réelles

Exercice 1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\sin(x)\cos(x), \quad (3x+2)^6, \quad \cos(-2x+1), \quad 3x\mathrm{e}^{\cos x}, \quad \ln\left(x^2+1\right), \quad \sqrt{\cos(x)+2}, \quad \sin\left(x^2\right), \quad \sin(3x)\cos(7x)$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}, \quad \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}, \quad \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^7}, \quad \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$$

$$\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}\right), \quad \exp\left(\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right), \quad \sin\left(\sqrt{x^2+1}\right), \quad \sqrt{1+\ln x}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^3-x^2+1}}, \quad \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \ln(\sin(\mathrm{e}^x)), \quad \exp(\sin(\ln x)).$$

(*question subsidiaire : on tentera également de déterminer les domaines de définition des fonctions ci-dessus*)

Exercice 2.
1. Rappeler les définitions de fonctions cosh et sinh.
2. Montrer que $\cosh' = \sinh$ et que $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.

Exercice 3. Soit $f\colon x \in]0,1] \mapsto f(x) = x\ln x \in \mathbb{R}$.
1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que f est décroissante et négative sur l'intervalle $]0, 1/\mathrm{e}[$. En déduire que f admet une limite ℓ en 0^+.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f\left(x^2\right) = 2xf(x)$. En déduire la valeur de ℓ en passant à la limite (*sans supposer cette limite déjà connue !*).

Exercice 4. Soit $h\colon]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ défini par $h(u) = \ln(1+u) - u$.
1. Déterminer les limites de h aux bornes de son intervalle de définition.
2. Faire l'étude des variations de la fonction h.
3. Vérifier que, pour tout $u > -1$: $\ln(1+u) \leq u$.

Exercice 5. Soit $x > 0$.
1. Montrer que :
$$-\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$
2. Montrer que
$$\frac{1}{x+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}.$$
3. En déduire que
$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^x \leq \mathrm{e} \leq \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}.$$
4. Vérifier que les fonctions $f, g\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x\ln(1+1/x)$ et $g(x) = (x+1)\ln(1+1/x)$ sont respectivement croissante et décroissante.
5. Montrer qu'il en est de même des fonctions $F, G\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définies par $F(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ et $G(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$.
6. Déterminer les limites des fonctions f, g, F, G en 0^+ et $+\infty$.
7. Montrer que $2 \leq \mathrm{e} \leq 4$.
8. Montrer que
$$0 \leq \mathrm{e} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^x \leq \frac{4}{x},$$
et en déduire une fraction rationnelle qui approche e à 10^{-2} près.