

TD - Continuité et dérivabilité

Exercice 1. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont prolongeables par continuité en 0 ?

1. $f(x) = \frac{x}{|x|}$, pour $x \neq 0$.
2. $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, pour $x \neq 0$.
3. $h(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, pour $x \neq 0$.
4. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1+x^n}}{x^n}$, pour $x \neq 0$, à discuter en fonction de $m, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - 1 - \ln|x|$.

1. Calculer les limites de f en 0, en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Etablir si f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 3. Montrer que l'équation $x(1 + e^x) = e^x$ admet une unique solution réelle dans $[0, 1]$.

Exercice 4. Montrer que l'équation $\frac{x}{2} - \sin x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ admet dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ exactement une solution strictement négative et une solution strictement positive.

Exercice 5. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^{40} + x - 10^{-40} = 0$ et $0 < x < \frac{1}{10}$.

Exercice 6. Déterminer (sans les calculer) le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle I dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2 - 16$, $I =]0, +\infty[$.
2. $f(x) = x^2 - 160$, $I =]-\infty, 0[$.
3. $f(x) = x^3 - \sqrt{\pi}$, $I =]0, +\infty[$.

Exercice 7. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\sin(x) \cos(x), \quad (3x+2)^6, \quad \cos(-2x+1), \quad 3xe^{\cos x}, \quad \ln(x^2+1), \quad \sqrt{\cos(x)+2}, \quad \sin(x^2), \quad \sin(3x) \cos(7x)$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}, \quad \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2}, \quad \frac{1}{(x^2+x+1)^7}, \quad \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right), \quad \exp\left(\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right), \quad \sin(\sqrt{x^2+1}), \quad \sqrt{1+\ln x}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^3-x^2+1}}, \quad \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \ln(\sin(e^x)), \quad \exp(\sin(\ln x)).$$

(question subsidiaire : on tentera également de déterminer les domaines de définition des fonctions ci-dessus)

Exercice 8.

1. Rappeler les définitions de fonctions cosh et sinh.
2. Montrer que $\cosh' = \sinh$ et que $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.

Exercice 9. Soit $f: x \in]0, 1] \mapsto f(x) = x \ln x \in \mathbb{R}$.

1. Etudier les variations de f .
2. Montrer que f est décroissante et négative sur l'intervalle $]0, 1/e[$. En déduire que f admet une limite ℓ en 0^+ .
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x^2) = 2xf(x)$. En déduire la valeur de ℓ en passant à la limite (sans supposer cette limite déjà connue !).

Exercice 10. Soit $h:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ défini par $h(u) = \ln(1+u) - u$.

1. Déterminer les limites de h aux bornes de son intervalle de définition.
2. Faire l'étude des variations de la fonction h .
3. Vérifier que, pour tout $u > -1$: $\ln(1+u) \leq u$.

Exercice 11. Soit $x > 0$.

1. Montrer que :

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

2. Montrer que

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}.$$

3. En déduire que

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^x \leq e \leq \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}.$$

4. Vérifier que les fonctions $f, g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x \ln(1 + 1/x)$ et $g(x) = (x+1) \ln(1 + 1/x)$ sont respectivement croissante et décroissante.

5. Montrer qu'il en est de même des fonctions $F, G: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $F(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ et $G(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$.

6. Déterminer les limites des fonctions f, g, F, G en 0^+ et $+\infty$.

7. Montrer que $2 \leq e \leq 4$.

8. Montrer que

$$0 \leq e - \left(\frac{x+1}{x}\right)^x \leq \frac{4}{x},$$

et en déduire une fraction rationnelle qui approche e à 10^{-2} près.