PRIMITIVES, INTÉGRALES ET SURFACES

• Définitions et utilité

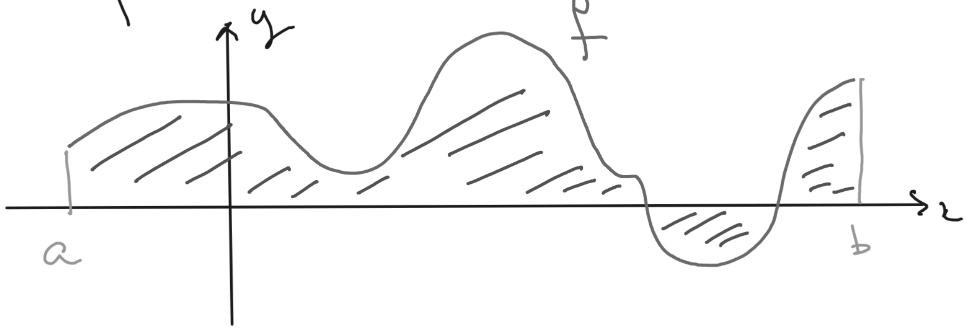
• **Déf** : Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Une primitive F de f sur I est une fonction définie sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

• **Prop** : Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f admet une primitive sur I.

• **Prop** : Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Si F est une primitive de f, alors, pour tout nombre $C \in \mathbb{R}$, la fonction $F+C$ est également une primitive de f.
2. Si F est une primitive de f. Alors toutes les primitives de f sont de la forme $F+C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

• **Application** : Soit f une fonction, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, qui admet une primitive F.



Si on désigne par

* S_+ la surface délimitée par f au-dessus de l'axe de x
* S_- la surface délimitée par f en-dessous de l'axe des x.

Alors : $S_+ - S_- = F(b) - F(a)$, où

F est une primitive de f.

Primitives des fonctions usuelles

On note dorénavant $\int f(x)\,dx$ la primitive à constante près de la fonction f.

* $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$ si $n \neq -1$

$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

* $\int e^x\,dx = e^x + C.$

$\int a^x\,dx = (\log_a e)\, a^x + C$

$\longrightarrow a^x = e^{x \ln(a)}$

* $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

$\left(\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \longrightarrow \operatorname{tg}' x = \frac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \right)$

$\boxed{\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x} \quad \left(= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \right)$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cotg x + C$$

$$\left(\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x} \longrightarrow \cotg' x = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

$$(*) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \longrightarrow \underline{\text{à vérifier.}}$$

$$= -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \; ; \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C \qquad \Bigg\| \qquad \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{th}(x) + C$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C.$$

$$\left(\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \longrightarrow (\cosh')(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x. \right)$$

TECHNIQUES POUR LE CALCUL DE PRIMITIVES

① Linéarité : f, g fonctions réelles, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int (af(x) + bg(x))\, dx = a\int f(x)\, dx + b\int g(x)\, dx.$$

• Ex.

$$\int (3e^x - \cos x)\, dx = 3\int e^x dx - \int \cos x\, dx$$
$$= 3e^x - \sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

② Changement de variables

• Ex: $\displaystyle\int e^{\cos x} \sin x\, dx = ?$

⟶ Feuille de TD, Exercice 1.

Lorsqu'on repère dans la fonction f la présence d'un terme et de sa dérivée, on peut changer de variable, en posant $u =$ le terme en question.

• $\displaystyle\int e^{\cos x} \underbrace{\sin x\, dx}_{-du}$ | on pose $u = \cos x$
$du = -\sin x\, dx$

$$F(x) = \int e^u (-du) = -\int e^u du$$
$$= -e^u + C$$
$$= -e^{\cos x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

· Rem: $\int e^{\cos x} dx \cancel{=} \cancel{\dfrac{-e^{\cos x}}{\sin x}} + C$

On sait pas faire !!

③ Intégration par parties

(Feuille de TD, Exercice 2)

- Ex : $\int e^x . x^2 dx$, $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$, $\int \ln(x) dx$

- Si on doit intégrer (chercher une primitive) un produit de fonctions, on essaye d'exprimer ce produit sous la forme :

$$\boxed{\int u . v' \, dx = u . v - \int u' . v \, dx}$$

- Ex : $\int e^x . x^2 dx$: on pose $v' = e^x \longrightarrow v = e^x$
$u = x^2 \longrightarrow u' = 2x$

$$\int e^x . x^2 dx = \underbrace{e^x}_{v} . \underbrace{x^2}_{u} - \int 2x e^x dx$$

$$= e^x . x^2 - 2 \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v'} dx$$

$u = x \longrightarrow u' = 1$

$v' = e^x \longrightarrow v = e^x$

$$\int e^x . x^2 dx = e^x . x^2 - 2\left(x e^x - \int \overset{u'}{1} \times \overset{v}{e^x} dx\right)$$

$$= e^x x^2 - 2x e^x + 2 e^x + C,$$

$$= e^x (x^2 - 2x + 2) + C. \quad C \in \mathbb{R}$$

• Ex : $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$ $\quad u = \ln(x)$

$du = \frac{dx}{x}$.

$\longrightarrow \int u \, du = \frac{1}{2} u^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$= \frac{1}{2} \ln^2(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

• Ex : $\int \ln(x) dx \longrightarrow \int \frac{x \ln(x)}{x} dx$

$u = \ln(x)$: $\int e^u \, u \, du \longrightarrow$ on sait

$du = \frac{dx}{x}$ faire par intégration par parties.

$f = u \longrightarrow f' = 1$

$g' = e^u \longrightarrow g = e^u$

$$\int e^u . u \, du = u . e^u - \int e^u du$$

$$= u . e^u - e^u + C$$

$$= \ln(x) . x - x + C$$

$$= x . \ln(x) - x + C$$

Deuxième méthode : $\int \ln(x) dx$.

$\ln(x) = 1 . \ln(x)$ | on pose

$u = \ln(x) \longrightarrow u' = \frac{1}{x}$

$v' = 1 \longrightarrow v = x$.

$$\int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{u} \, dx = x \cdot \ln(x) - \int \frac{x}{x} \, dx$$

$$= \underline{x \ln(x) - x + C} .$$

4) Primitives de fractions rationnelles

(Feuille de TD, Exercice 3)

• Ex : $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-3x+2}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-4x+5}\,dx$

$\rightarrow$ Fractions du type :

$$\frac{\text{polynôme de degré } 1}{\text{polynôme de degré } 2}$$

• Ex : $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-3x+2}\,dx$: on cherche si le dénominateur a des racines réelles.

$$x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$$

Dans ce cas :

$$\frac{x+2}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$$

On multiplie par $x-2$

$$\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-1)} = A + \frac{B(x-2)}{x-1}$$

Puisque c'est vrai pour tout x, on prend
$x \neq 1$

$\underline{x=2}$ $\quad \dfrac{4}{1} = A + 0 \longrightarrow \boxed{A=4}$

Maintenant, on cherche B, mais maintenant on multiplie par $x-1$

$$x+2 = A(x-1) + B(x-2)$$

$$3 = 0 - B \longrightarrow \boxed{B=-3}$$

$$\frac{x+2}{x^2-3x+2} = \frac{4}{x-2} - \frac{3}{x-1}$$

$$\int \frac{x+2}{x^2-3x+2}\,dx = 4\int \frac{dx}{x-2} - 3\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= 4\ln|x-2| - 3\ln|x-1| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

- $\underset{\sim\sim}{Ex.}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{3x-1} = \int \frac{dx}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ln\left|x-\frac{1}{3}\right| + C$$

- $\underset{\sim\sim}{Ex}$: $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-4x+5}\,dx.$

Dans ce cas, le dénominateur n'a pas de

racines réelles.

On fait apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur : $2x-4$.

$$x-3 = \frac{1}{2}(2x-4) - 3 - \left(-\frac{4}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(2x-4) - 1$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}(2x-4) - 1}{x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx$$
$$- \int \frac{dx}{x^2-4x+5}$$

$u = x^2-4x+5$

$du = (2x-4)\,dx.$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|u|$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+5| = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)$$

- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+5} = ?$

$$\underbrace{x^2-4x}+5 = x^2-4x+4+(5-4)$$
$$= (x-2)^2+1$$

$u = x-2$, $du = dx$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+5} = \int \frac{du}{u^2+1} = \text{Arctg}\, u + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) - \text{Arctg}\,(x-2) + C}$$

- $\underset{\sim\sim}{\text{Ex}}$: $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+7} = I$

$$3x^2+7 = 3\left(x^2+\frac{7}{3}\right)$$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\underline{\frac{7}{3}}}$$

$\longrightarrow \frac{7}{3}$ pose problème

$$x^2+\frac{7}{3} = \frac{7}{3}\left(\frac{3}{7}x^2+1\right)$$

$$= \frac{7}{3}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}x\right)^2+1\right)$$

On pose $u = \sqrt{\frac{3}{7}}\, x$, $du = \sqrt{\frac{3}{7}}\, dx$

$dx = \sqrt{\frac{7}{3}}\, du$

$$I = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{7} \int \frac{\sqrt{\frac{7}{3}}\, du}{u^2+1}$$

$$= \frac{1}{7} \times \sqrt{\frac{7}{3}} \int \frac{du}{u^2+1}$$

$$= \frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{3}}\operatorname{arctg} u + C$$

$$= \frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\,x\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

⑤ Primitives de fonctions trigonométriques

$\int F(\cos x, \sin x)\,dx$ où F est une fraction rationnelle.

(Feuille de TD, Exercice 4)

• Ex : $\int \cos^3 x \, dx = I$

1ère méthode : $\cos^3 x = \cos^2 x \times \cos x$
$= (1 - \sin^2 x) \cos x$

$u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$

$$I = \int (1 - u^2)\, du$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

2ème méthode : on linéarise.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad ; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos^3 x = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^3}{8} = \frac{\underline{e^{3ix}} + 3e^{2ix} \cdot e^{-ix} + 3e^{ix} \cdot e^{-2ix} + \underline{e^{-3ix}}}{8}$$

$$\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{8} = \frac{2\cos(3x)}{8} \longrightarrow a = 3x$$

$(e^{ia} + e^{-ia} = 2\cos a)$

$$\frac{3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{8} = \frac{6\cos x}{8} = \frac{3\cos x}{4}$$

$$\cos^3 x = \frac{\cos(3x)}{4} + \frac{3\cos x}{4}$$

$$I = \int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{4}\left(\frac{\sin(3x)}{3} + 3\sin x\right) + C$$

. <u>Méthode générale</u> : (formules de Bioche)

On veut calculer $\int f(x)\,dx$ où

$f(x) = F(\cos x, \sin x)$

a) Si $f(-x) = -f(x)$, on pose

$t = \cos x$, $dt = -\sin x \, dx$

b) Si $f(\pi - x) = -f(x)$, on pose

$t = \sin x$, $dt = \cos x \, dx$ (ex: $f(x) = \cos^3 x$)

c) Si $f(\pi + x) = f(x)$, on pose

$t = \operatorname{tg} x$, $dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx$

d) Si aucune de ces règles ne s'applique,

→ vas te pendre (ça a des inconvénients)

→ internet pour les noeuds

→ On essaye d'autres méthodes

d'intégration (intégration par parties, etc...)

$\longrightarrow$ On applique le joker :

$u = tg\left(\frac{x}{2}\right) \longrightarrow$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

Par ce changement de variables, on peut toujours transformer une fraction rationnelle en sinx, cosx en une fraction rationnelle en u. Mais, le degré de la fraction obtenue est souvent élevé.

6) Primitives diverses (Feuille de TD, Exercices 5 et 6)

Dans la suite, F désigne une fraction rationnelle.

• Ex : $\int \sqrt{x^2+x+1}\, dx$

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1$$

$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1\right)$$

$$u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right), \quad du = \frac{2}{\sqrt{3}}\, dx, \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\, du$$

$$I = \int \sqrt{x^2+x+1}\, dx$$

$$= \int \sqrt{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right)}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}} \int \sqrt{u^2+1}\, \frac{\sqrt{3}}{2}\, du$$

$$= \frac{3}{4}\int \sqrt{u^2+1}\, du \quad \oplus$$

$\circledast$ $\int \sqrt{u^2+1}\,du$, on pose $t = \operatorname{sh} u$
$dt = \operatorname{ch} u$

$\circledast$ $\int \sqrt{u^2-1}\,du$, on pose $t = \operatorname{ch} u$
$dt = \operatorname{sh} u\, du$

$\circledast$ $\int \sqrt{1-u^2}\,du$, on pose $t = \sin u$
$dt = \cos u\, du$

· Retour à l'exemple :

$$I = \frac{3}{4}\int \sqrt{u^2+1}\,du, \quad \text{on pose } u = \operatorname{sh} t$$
$$du = \operatorname{ch} t\, dt$$

$$\sqrt{u^2+1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t+1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{ch} t$$
$$\boxed{\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1}$$

$$I = \frac{3}{4}\int \operatorname{ch} t \operatorname{ch} t\, dt = \int \operatorname{ch}^2 t\, dt$$

$$\operatorname{ch}^2 t = \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}$$

$$I = \frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\left(\frac{e^{2t}}{2} + 2t - \frac{e^{-2t}}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{16}\left(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2} + 2t\right)$$

$$= \frac{3}{16}\left(\operatorname{sh} 2t + 2t\right) + C$$

$$u = \operatorname{sh} t \longrightarrow t = \operatorname{argsh} u = \operatorname{argsh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$I = \frac{3}{16}\left(\operatorname{sh}\left(2\operatorname{argsh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right)\right.$$

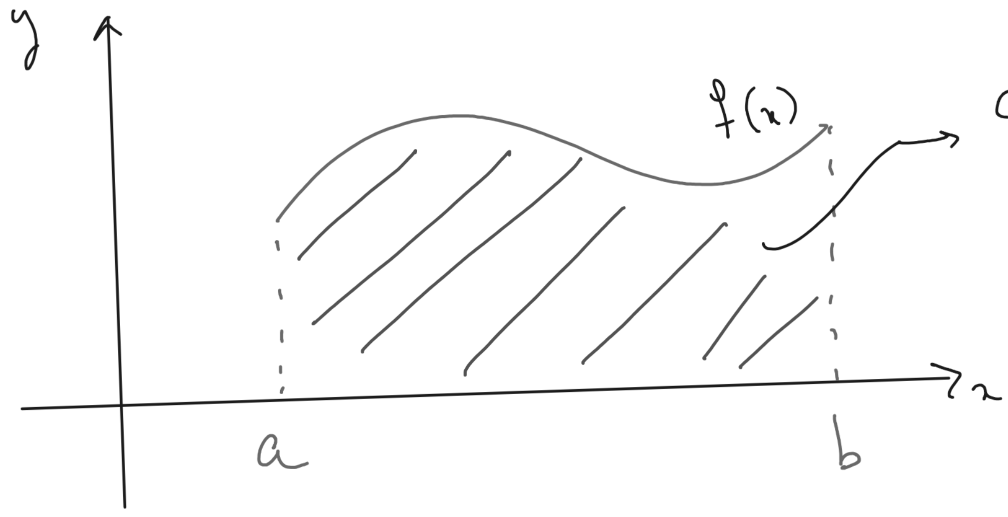
$$\left. + 2\operatorname{argsh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right) + C$$

$C \in \mathbb{R}$.

- $f(x) = F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ F : fraction.

$$u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

• Application : calcul de surfaces (Feuille de TD, Exercice 7)



$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f