FONCTIONS RÉELLES, PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

1 Domaines de définition

Une ***fonction réelle*** f est une relation qui à tout nombre x d'un ensemble $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}$ associe un unique nombre réel noté $f(x)$. L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est appelé le ***domaine de définition*** de la fonction f. On note :

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Le ***graphe*** d'une fonction réelle $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}_f\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Si $A \subseteq \mathcal{D}_f$, le ***graphe de f sur*** A *est l'ensemble* $\{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathcal{D}_f$.

1. Une ***fonction réelle*** f est une relation qui à tout nombre x d'un ensemble $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}$ associe un unique nombre réel noté $f(x)$. L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est appelé le ***domaine de définition*** de la fonction f. On note :

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

2. Le ***graphe*** d'une fonction réelle $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}_f\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Si $A \subseteq \mathcal{D}_f$, le ***graphe de f sur*** A *est l'ensemble* $\{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathcal{D}_f$.
3. Soit $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, alors l'***ensemble image*** de f, noté $f(\mathcal{D}_f)$, est l'ensemble $\{f(x) : x \in \mathcal{D}_f\}$ de toutes les valeurs prises par la fonction f.

Soient $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathcal{D}_g \subseteq f(\mathcal{D}_f) \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que $f(\mathcal{D}_f) \subseteq \mathcal{D}_g$. Alors la ***composée de f par la fonction*** g, notée $g \circ f$, est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. On note :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_f \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & f(\mathcal{D}_f) \subseteq \mathcal{D}_g \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & (g\circ f)(x) = g(f(x)) \end{tikzcd}$$

2 Réduction du domaine d'étude : parité, symétries, périodicité

a) Parité.

On considère une fonction réelle f telle que si $x \in \mathcal{D}_f$ alors $-x \in \mathcal{D}_f$. Alors :
1. La fonction f est ***paire*** si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = f(x)$.
2. La fonction f est ***impaire*** si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = -f(x)$.

Proposition. On a les propriétés suivantes :
1. *L'inverse d'une fonction paire est une fonction paire. L'inverse d'une fonction impaire est une fontion impaire.*
2. *Le produit de deux fonctions paires est une fonction paire.*
3. *Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.*

Proposition (suite).
1. *Le produit de d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.*
2. *La somme de deux fonctions paires est une fonction paire, la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire.*

Proposition. Soit $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors :
1. Si f est paire, le graphe de f s'obtient en complétant le graphe de f sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées Oy.
2. Si f est impaire, le graphe de f s'obtient en complétant le graphe de f sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ par symétrie par rapport à l'origine.

b) Symétries.

Proposition. *Soit $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On suppose qu'il existe $a \in \mathcal{D}_f$ tel que $a+u \in \mathcal{D}_f$, alors $a-u \in \mathcal{D}_f$ (ou encore tel que si $x \in \mathcal{D}_f$, alors $2a-x \in \mathcal{D}_f$). On a :*

1. *$f(a-u) = f(a+u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ tel que $a+u \in \mathcal{D}_f$ (ou encore si $f(2a-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$), alors le graphe Γ_f de f est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = a$.*
2. *On pose $b = f(a)$. Si $\dfrac{f(a+u)+f(a-u)}{2} = b$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ tel que $a+u \in \mathcal{D}_f$ (ou encore si $f(2a-x) = 2b - f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$), alors le graphe Γ_f de f est symétrique par rapport au point $(a,b) = (a, f(a))$.*

Soit $f\colon [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On note $a = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, et $b = f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$. On a :

1. *Si $f(\alpha-u) = f(\beta+u)$ pour tout $u \in [0, \beta-\alpha]$ (ou encore si $f(\alpha+\beta-x) = f(x)$ pour tout $x \in [\alpha,\beta]$), alors le graphe Γ_f de f est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$.*
2. *Si $\dfrac{f(\alpha+u)+f(\beta-u)}{2} = b$ pour tout $u \in [0,\beta-\alpha]$ (ou encore si $f(\alpha+\beta-x) = 2b - f(x)$ pour tout $x \in [\alpha,\beta]$), alors le graphe Γ_f de f est symétrique par rapport au point $(a,b) = \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$.*

c) Périodicité.

Soient $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $T > 0$ un nombre réel tel que, si $x \in \mathcal{D}_f$, alors $x+T \in \mathcal{D}_f$. La fonction f est dite ***périodique de période*** T si $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

Propriétés des fonctions périodiques.

1. *La somme, le produit, l'inverse et le quotient (lorsqu'ils sont définis) de deux fonctions périodiques* **de même période** *T sont également périodiques de période T.*
2. *Soient f_1 une fonction périodique de période T_1 et f_2 une fonction périodique de période T_2. On suppose qu'il existe deux entiers $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_1T_1 = n_2T_2$. Alors La somme, le produit, l'inverse et le quotient (lorsqu'ils sont définis) sont périodiques de période $n_1T_1 = n_2T_2$.*
3. *Soient $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle périodique de période T et $a \in \mathbb{R}^*$. Alors la fonction $g\colon x \mapsto f(ax)$ est périodique de période $\dfrac{T}{a}$.*

d) Cas des fonctions périodiques qui admettent également des symétries

1. Si la fonction f est ***périodique*** de période T et que son graphe ***présente une symétrie*** par rapport à la droite verticale d'équation $x = a$ ou au point (a,b), on restreint l'étude à l'intervalle $\left[a, a+\dfrac{T}{2}\right]$. On complète ensuite le graphe à l'intervalle $\left[a-\dfrac{T}{2}, a+\dfrac{T}{2}\right]$ par la symétrie appropriée, et on prolonge à tout le domaine par périodicité de période T. Le cas fréquent est celui des fonctions paires/impaires et périodiques.
2. Il arrive que la fonction f, restreinte à l'intervalle $\left[a, a+\dfrac{T}{2}\right]$ présente à nouveau une symétrie par rapport à la droite verticale d'équation $x = a + \dfrac{T}{4}$ ou au point $\left(a+\dfrac{T}{4}, f\left(a+\dfrac{T}{4}\right)\right)$. Dans ce cas, on restreint l'étude à l'intervalle $\left[a, a+\dfrac{T}{4}\right]$, puis on complète le graphe sur $\left[a, a+\dfrac{T}{2}\right]$ par la symétrie appropriée, et on est ramené au cas précédent.