MATH1A – COURS d'ANALYSE 1

J.-Ph. Rolin. Page web : rolin.perso.math.cnrs.fr

Université de Bourgogne, Année 2018–2019

Le propos de ce cours est de donner l'ensemble des techniques permettant l'étude complète des ***fonctions réelles***. Il s'agit, étant donnée une fonction de type "usuel" (c'est à dire obtenue par composition de fonctions "classiques" : somme, produit, quotient, exp, ln, sin, cos, tan, arcsin, arccos, cosh, sinh, ...) d'être capable de décrire complètement son comportement et l'allure de son graphe. Plus précisément, on se concentre sur les éléments du programme suivant :

Programme général.

1. *Domaine de définition* : en quels points la fonction est-elle définie ?
2. Etude de leur éventuelle *parité*, *symétrie*, *périodicité*, en vue de la réduction du domaine d'étude : souvent, la connaissance du graphe de la fonction sur un sous-ensemble de son domaine de définition permet de connaître la fonction totalement.
3. *Etude de limites en tout point ou à l'infini.* Nous verrons dans ce cours des techniques nouvelles par rapport au programme de terminale permettant de calculer les limites d'une fonction en tout point ou à l'infini, ainsi que ce qu'on appelle son *comportement asymptotique* (existence éventuelle d'asymptotes, position du graphe de la courbe par rapport aux asymptotes).
4. *Dérivée* et *sens de variation* : on découpe le domaine d'étude en un nombre fini d'intervalles sur lesquels la fonction est monotone (c'est-à-dire d'intervalles sur lesquels la dérivée a un signe constant). Pour cela, Le calcul systématique de la dérivée d'une fonction (si cette dérivée existe) *est toujours possible.*
5. *Calcul de primitives, et études d'integrales* : cela permet de calculer la surface délimitée par le graphe de deux courbes entre deux points de leur domaine de définition.

Table des matières

1 Généralités sur les fonctions réelles

Notation. Dans tout ce cours, on adopte les notations suivantes :

1. On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble de nombres réels, $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et par $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$ l'ensemble des entiers naturels.
2. On note également $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty[$ l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} =]-\infty, 0]$ l'ensemble des réels négatifs ou nuls.
3. On note $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ l'ensemble des réels non nuls, $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[$ l'ensemble des réels strictement positifs et $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} =]-\infty, 0[$ l'ensemble des réels strictement négatifs.

1.1 Domaine de définition, graphe et ensemble image d'une fonction réelle

De façon générale, l'étude d'une fonction réelle débute par la détermination de son *domaine de définition*. Il s'agit du point 1. du Programme général.

Définition 1.1.1. Une ***fonction réelle*** f est une relation qui à tout nombre x d'un ensemble $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}$ associe un unique nombre réel noté $f(x)$. L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est appelé le ***domaine de définition*** de la fonction f. On note :

$$\begin{aligned} f \colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Remarque 1.1.2. On utilise fréquemment la lettre x comme notation pour la variable et f comme notation pour la fonction. Comme il ne s'agit que d'une notation, on peut très bien employer d'autres lettres. On pourra donc noter $f \colon y \mapsto f(y)$, $g \colon x \mapsto g(x)$ ou $h \colon t \mapsto h(t)$.

Définition 1.1.3. Le ***graphe*** d'une fonction réelle $f \colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}_f\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Si $A \subseteq \mathcal{D}_f$, le ***graphe de*** f ***sur*** A *est l'ensemble* $\{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathcal{D}_f$.

Exemple 1.1.4 (Exemples classiques)**.**

1. Si $f = \exp, \sin, \cos$ ou $\arctan$, $f \colon x \mapsto x^p$ avec $p \in \mathbb{N}$, ou si f est une fonction *polynôme* $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ (avec $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$), alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. De même, si $f \colon x \mapsto \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$ avec q entier naturel impair, alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. Si $f\colon x \mapsto x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
3. Si $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$, $f\colon x \mapsto \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$, avec q entier naturel pair (non nul), alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$.
4. Si $f\colon x \mapsto x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, où $p, q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Alors, si q est pair (et donc p impair), $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$, et si q est impair, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
5. Si $f = \ln$, ou $f\colon x \mapsto x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$ avec $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

Définition 1.1.5. Soit $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, alors l'***ensemble image*** de f, noté $f(\mathcal{D}_f)$, est l'ensemble $\{f(x) : x \in \mathcal{D}_f\}$ de toutes les valeurs prises par la fonction f.

Exemple 1.1.6.
1. Si $f = \ln$, alors $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$ et $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}$.
2. Si $f : x \mapsto \sqrt{x}$, alors $\mathcal{D}_f = [0, +\infty[$ et $f(\mathcal{D}_f) = [0, +\infty[$.
3. Si $f = \sin$, alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $f(\mathcal{D}_f) = [-1, 1]$ (voir Figure 1.1.1)

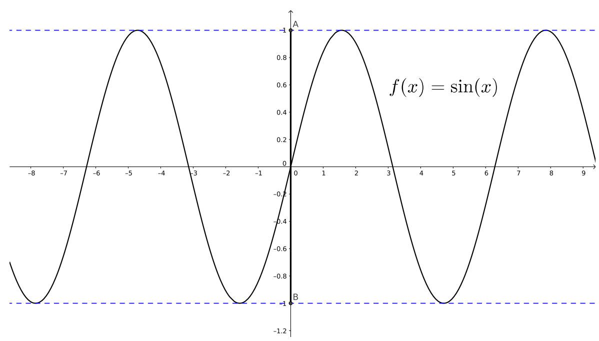


FIGURE 1.1.1 – Graphe de la fonction sin

1.2 Composition fonctions réelles

Dans la pratique, la plupart des fonctions réelles étudiées sont obtenues par *composition* de fonctions classiques, dont le comportement sera étudié au fur et à mesure de ce cours :

Définition 1.2.1. Soient $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathcal{D}_g \subseteq f(\mathcal{D}_f) \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que $f(\mathcal{D}_f) \subseteq \mathcal{D}_g$. Alors la ***composée de*** f ***par la fonction*** g, notée $g \circ f$, est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. On note :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_f \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & f(\mathcal{D}_f) \subseteq \mathcal{D}_g \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & (g \circ f)(x) = g(f(x))
\end{tikzcd}$$

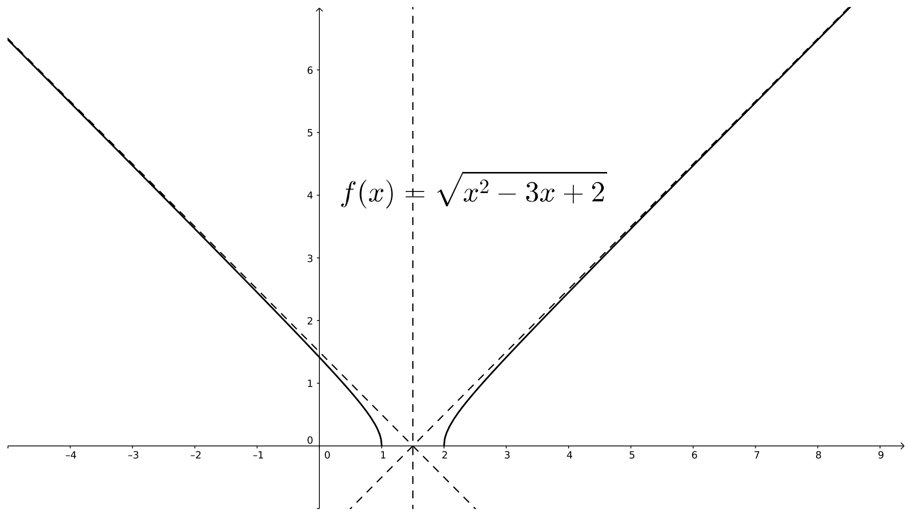
Remarque 1.2.2. Dans la définition ci-dessus, on note l'hypothèse fondamentale $f(\mathcal{D}_f) \subseteq \mathcal{D}_g$, qui permet de définir la composition $g \circ f$. On note la composition $g \circ f$, bien que g "vienne après" f dans la composition, $(g \circ f)(x)$ est un raccourci pour $g(f(x))$.

Remarque 1.2.3. De façon générale le domaine de définition de la composée $h = g \circ f$ est l'ensemble $\{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \in \mathcal{D}_g\}$, qui est un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$.

Exemple 1.2.4. La fonction $h : x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, est la composée de la fonction $f\colon x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ par la fonction $g\colon y \mapsto y^p$. On sait que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ si q est impair et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$ si q est pair. D'autre part, puisque $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, on a toujours $f(\mathcal{D}_f) \subseteq \mathcal{D}_g$. Donc $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}_+$ si q est pair et $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$ si q est pair (voir Exemple 1.1.4).

Exercice 1.2.5. La fonction $h\colon x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ est la composée de la fonction $f\colon x \mapsto x^2 - 3x + 2$ par la fonction $g\colon y \mapsto \sqrt{y}$. Bien que le domaine de définition de f soit l'ensemble $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, le domaine de définition de $h = g \circ f$

est l'ensemble $\{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 \geq 0\right\}$. Or $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$, qui est positif pour $x \leq 1$ ou $x \geq 2$. Donc $\mathcal{D}_h = \mathcal{D}_{g \circ f} =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.



Remarque 1.2.6. On observe deux phénomènes intéressants dans l'exemple 1.2.5 : le comportement presque rectiligne "à l'infini", proche des deux droites obliques en pointillé, et la symétrie par rapport à une droite verticale également en pointillé. Cela sera étudié plus loin dans le cours.

1.3 Réduction du domaine d'étude d'une fonction : parité, périodicité, symétrie

Il est souvent possible d'utiliser certaines des propriétés d'une fonction afin de réduire le domaine d'étude. On l'étudie alors sur le domaine réduit, et on complète convenablement le dessin afin d'obtenir le graphe sur tout le domaine de définition. Cela correspond au point 2. du Programme Général

1.3.1 Fonctions paires ou impaires

Définition 1.3.1. On considère une fonction réelle f telle que l'opposé de tout élément de $\mathcal{D}_f$ appartienne encore à $\mathcal{D}_f$. Alors :

1. La fonction f est ***paire*** si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = f(x)$.
2. La fonction f est ***impaire*** si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = -f(x)$.

Remarque 1.3.2.

1. Une fonction f impaire vérifie nécessairement $f(0) = 0$.
2. La seule fonction à la fois paire et impaire est la *fonction nulle* $x \mapsto 0$.

Exemple 1.3.3.

1. Les fonctions cos, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^p$ avec $p \in \mathbb{Z}$ pair, sont des fonctions paires.
2. Les fonctions sin, arctan, $x \mapsto x^p$ avec $p \in \mathbb{Z}$ impair, sont des fonctions impaires.

Proposition 1.3.4. *On a les propriétés suivantes :*

1. *L'inverse d'une fonction paire est une fonction paire. L'inverse d'une fonction impaire est une fontion impaire.*
2. *Le produit de deux fonctions paires est une fonction paire.*
3. *Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.*
4. *Le produit de d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.*
5. *La somme de deux fonctions paires est une fonction paire, la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire.*

Remarque 1.3.5.

1. Dans la proposition précédente, les propriétés vérifiées par le produit de deux fonctions sont également vérifiées par le quotient de deux fonctions.
2. On ne peut rien dire de particulier de la somme d'une fonction paire est d'une fonction impaire.

Exemple 1.3.6.
1. Une fonction polynôme dont tous les degrés sont pairs est une fonction paire. Ex : $x \mapsto x^4 + 3x^2 + 1$.
2. Une fonction polynôme dont tous les degrés sont impairs est une fonction impaire. Ex :$x \mapsto 2x^5 + x^3 - 4x$.
3. Une fonction polynôme qui contient des termes de degré pair et des termes de degré impair n'est ni paire ni impaire. Ex :$x \mapsto x^3 - x^2 + x - 1$.
4. La fonction tan : $x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, qui est le quotient de la fonction impaire sin et de la fonction paire cos, est une fonction impaire. Son domaine de définition est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$.

L'étude des fonctions paires ou impaires est simplifiée grâce à la proposition suivante :

Proposition 1.3.7. *Soit $f \colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors :*
1. *Si f est paire, le graphe de f s'obtient en complétant le graphe de f sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées Oy.*
2. *Si f est impaire, le graphe de f s'obtient en complétant le graphe de f sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ par symétrie par rapport à l'origine.*

Cette proposition permet donc de restreindre le domaine d'étude d'une fonction paire ou impaire aux valeurs positives de la variable.

1.3.2 Fonctions présentant des symétries

Cette notion importante, qui généralise celle parité d'une fonction, permet également la réduction de l'intervalle d'étude. Elle se résume à la proposition suivante :

Proposition 1.3.8. *Soit $f \colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On suppose qu'il existe $a \in \mathcal{D}_f$ tel que si $a+u \in \mathcal{D}_f$, alors $a - u \in \mathcal{D}_f$ (ou encore tel que si $x \in \mathcal{D}_f$, alors $2a - x \in \mathcal{D}_f$). On a :*
1. *$f(a-u) = f(a+u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ tel que $a+u \in \mathcal{D}_f$ (ou encore si $f(2a-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$), alors le graphe Γ_f de f est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = a$.*
2. *On pose $b = f(a)$. Si $\dfrac{f(a+u) + f(a-u)}{2} = b$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ tel que $a + u \in \mathcal{D}_f$ (ou encore si $f(2a-x) = 2b - f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$), alors le graphe Γ_f de f est symétrique par rapport au point $(a,b) = (a, f(a))$.*

Remarque 1.3.9.
1. La propriété 1. signifie que la fonction $g : u \mapsto f(a+u)$ est une fonction paire.
2. La propriété 2. signifie que la fonction $h \colon u \mapsto f(a+u) - b$ est une fonction impaire. Elle exprime que b est le milieu du segment $[f(a-u), f(b+u)]$.
3. Ces deux propriétés permettent de restreindre l'étude de f "à droite de a", c'est à dire sur le domaine $\mathcal{D}_f \cap [a, +\infty[$.

Exemple 1.3.10. On reprend la fonction h de l'exemple 1.2.5, donnée par $h \colon x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$. On pose $a = \dfrac{3}{2}$. On constate que :

$$\begin{aligned} h\left(2 \times \frac{3}{2} - x\right) &= h(3-x) = \sqrt{(3-x)^2 - 3(3-x) + 2} \\ &= \sqrt{9 - 6x + x^2 - 9 + 3x + 2} = \sqrt{x^2 - 3x + 2} = h(x). \end{aligned}$$

Ainsi le graphe Γ_h de h est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \dfrac{3}{2}$.

La proposition précédente prend la forme suivante pour des fonctions définies sur des intervalles bornés :

Proposition 1.3.11. *Soit $f\colon [\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction réelle. On note $a=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, et $b=f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$. On a :*

1. *Si $f(\alpha+u)=f(\beta-u)$ pour tout $u\in[0,\beta-\alpha]$ (ou encore si $f(\alpha+\beta-x)=f(x)$ pour tout $x\in[\alpha,\beta]$), alors le graphe Γ_f de f est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.*
2. *Si $\dfrac{f(\alpha+u)+f(\beta-u)}{2}=b$ pour tout $u\in[0,\beta-\alpha]$ (ou encore si $f(\alpha+\beta-x)=2b-f(x)$ pour tout $x\in[\alpha,\beta]$), alors le graphe Γ_f de f est symétrique par rapport au point $(a,b)=\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$.*

Exemple 1.3.12. On considère la fonction $\sin\colon [0,\pi]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ici $\alpha=0$ et $\beta=\pi$. On a :

$$\sin(\alpha+\beta-x)=\sin(\pi-x)=\sin x$$

pour tout $x\in[0,\pi]$, donc le graphe de la fonction sin sur $[0,\pi]$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x=\dfrac{\pi}{2}$.

1.3.3 Fonctions périodiques

Ces fonctions apparaissent fréquemment dans le cadre de l'étude des fonctions trigonométriques.

Définition 1.3.13. Soient $f\colon \mathcal{D}_f\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $T>0$ un nombre réel tel que, si $x\in\mathcal{D}_f$, alors $x+T\in\mathcal{D}_f$. La fonction f est dite ***périodique de période*** T si $f(x+T)=f(x)$ pour tout $x\in\mathcal{D}_f$.

Remarque 1.3.14. Si on sait qu'une fonction f est périodique de période T, on peut restreindre son étude à n'importe quel intervalle I de longueur T. Le graphe complet de f se déduit du graphe de f sur I par toutes les translations horizontales par nT, pour $n\in\mathbb{Z}$.

Exemple 1.3.15.

1. Les fonctions sin et cos, de domaines de définition $\mathbb{R}$, sont périodiques de période 2π.
2. La fonction tan est périodique de période π. En effet, pour tout réel x différent de $\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, on a :

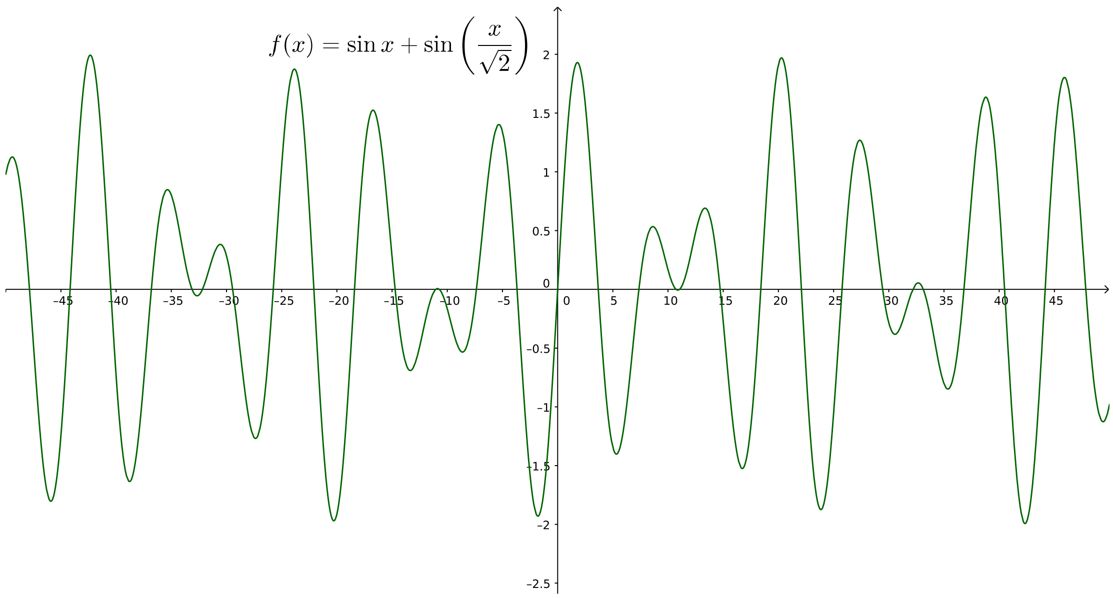
$$\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x.$$

Proposition 1.3.16.

1. *La somme, le produit, l'inverse et le quotient (lorsqu'ils sont définis) de deux fonctions périodiques **de même période** T sont également périodiques de période T.*
2. *Soient f_1 une fonction périodique de période T_1 et f_2 une fonction périodique de période T_2. On suppose qu'il existe deux entiers $n_1,n_2\in\mathbb{N}^*$ tels que $n_1T_1=n_2T_2$. Alors La somme, le produit, l'inverse et le quotient (lorsqu'ils sont définis) sont périodiques de période $n_1T_1=n_2T_2$.*
3. *Soient $f\colon \mathcal{D}_f\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction réelle périodique de période T et $a\in\mathbb{R}^*$. Alors la fonction $g\colon x\mapsto f(ax)$ est périodique de période $\dfrac{T}{a}$.*

Remarque 1.3.17.

1. Les hypothèses des points 1. et 2. de la proposition sont essentielles. On ne doit pas s'imaginer qu'en général, la somme, le produit... de deux fonctions périodiques est périodique. Par exemple la fonction $f\colon x\mapsto \sin x+\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$ est la somme de deux fonctions périodiques de périodes respectives 2π et $2\pi\sqrt{2}$ (voir le point 3. de la proposition). Ces deux périodes ne satisfont pas l'hypothèse du point 2. En effet, s'il existait $n_1,n_2\in\mathbb{N}^*$ tels que $n_12\pi=n_22\pi\sqrt{2}$, on aurait $\sqrt{2}=\dfrac{n_1}{n_2}\in\mathbb{Q}$. Or il est *bien connu* que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$. La fonction f n'est en effet pas périodique.
2. Si une fonction est périodique de période T, elle est également périodique de période $2T$, $3T$, ... C'est d'ailleurs ce qui explique le point 2. de la proposition. Elle a donc des périodes aussi grandes que l'on veut. Il est donc important, afin de réduire au maximum l'intervalle d'étude, de déterminer *la plus petite période d'une fonction périodique*. Par exemple, la fonction tan est *a priori* périodique de période 2π, en tant que quotient de deux fonctions périodiques de période 2π, mais on a vu qu'elle est également périodique de période π, ce qui permet de restreindre d'avantage son intervalle d'étude.



Exemple 1.3.18. La fonction $f : x \mapsto \cos(3x) + \sin(2x)$ est la somme d'une fonction de période $\dfrac{2\pi}{3}$ et d'une fonction de période $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$. Puisque $3 \times \dfrac{2\pi}{3} = 2 \times \pi$, on en déduit que la fonction f est périodique, et qu'elle admet 2π comme période. Elle pourrait d'ailleurs avoir une période plus petite, ce raisonnement ne le dit pas.

1.3.4 Cas des fonctions périodiques qui admettent des symétries

Une fonction réelle peut très bien admettre des symétries tout en étant périodique. C'est le cas des fonctions cos (paire et périodique de période 2π), sin (impaire et périodique de période 2π), ou tan (impaire et périodique de période π). Il y a donc dans ce cas deux raisons *simultanées* de procéder à une réduction de l'intervalle d'étude. Il faut savoir les utiliser : plus l'intervalle d'étude est réduit, plus l'étude du sens de variation est commode.

La marche à suivre générale est la suivante :

1. Si la fonction f est périodique de période T dont le graphe présente une symétrie par rapport à la droite verticale d'équation $x = a$ ou au point (a, b), on restreint l'étude à l'intervalle $\left[a, a + \dfrac{T}{2}\right]$. On complète ensuite le graphe à l'intervalle $\left[a - \dfrac{T}{2}, a + \dfrac{T}{2}\right]$ par la symétrie appropriée, et on prolonge à tout le domaine par périodicité de période T. Le cas fréquent est celui des fonction paires/impaires et périodiques.
2. Il arrive que la fonction f, restreinte à l'intervalle $\left[a, a + \dfrac{T}{2}\right]$ présente à nouveau une symétrie (voir la Proposition 1.3.11). Dans ce cas, on restreint l'étude à l'intervalle $\left[a, a + \dfrac{T}{4}\right]$, puis on complète le graphe sur $\left[a, a + \dfrac{T}{2}\right]$ par la symétrie appropriée, et on est ramené au cas précédent.

Exemple 1.3.19. Etude de la fonction cos. On sait que la fonction cos est paire, et périodique de période 2π. On restreint donc l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$, et on complètera le graphe obtenu sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par symétrie par rapport à l'axe de ordonnées Oy, puis sur le domaine de définition $\mathbb{R}$ par périodicité (translations horizontales par $n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Sur l'intervalle $[0, \pi]$ on constate une symétrie supplémentaire. En effet $\cos(\pi - u) = -\cos u$. Donc, d'après le point 2. de la Proposition 1.3.11 avec $a = \dfrac{\pi}{2}$ et $b = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, on restreint l'étude à l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On complète le graphe sur $[0, \pi]$ par symétrie par rapport au point $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$. Sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la dérivée de cos, qui est $-\sin$, est toujours négative : la fonction cos est donc décroissante, de $\cos(0) = 1$ jusqu'à $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

2 Fonctions injectives, surjectives, bijectives, applications réciproques

Cette section traite du problème suivant suivant : étant donnée une fonction $f\colon E \to F$, combien un élément de F peut-il avoir d'*antécédents* ? En a-t-il zéro, un seul, ou d'avantage ? Il s'agit donc bien de *compter* le nombre d'antécédents d'un élément de F, plutôt que de *calculer* ces antécédents.

Le contenu de cette section sert de préalable au point 4. du Programme général.

2.1 Injections, surjections, bijections

Les notions introduites dans cette section sont fondamentales. Elles dépassent largement le cadre des fonctions réelles. Mais elles s'illustrent clairement, presque "visuellement", dans le cas des fonctions réelles. Nous définissons d'abord ces notions dans un cadre général, que nous expliquons ensuite de le cadre des fonctions réelles.

Définition 2.1.1. Soient E et F deux ensembles, et $f\colon E \to F$ deux fonctions. On rappelle que pour tout $y \in F$, un élément $x \in E$ est un ***antécédent*** de y par la fonction f si $f(x) = y$. On dit que :

1. f est ***injective*** (ou bien f est une ***injection***) si tout élément de f a *au plus* un antécédent dans E. De façon équivalente, f est ***injective*** si l'égalité $f(x_1) = f(x_2)$ avec $x_1, x_2 \in E$ implique $x_1 = x_2$.
2. f est ***surjective*** (ou bien f est une ***surjection***) si tout élément de F a *au moins* un antécédent dans E. De façon équivalente, f est surjective si, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
3. f est ***bijective*** (ou bien f est une ***bijection***) si si tout élément de F, a exactement un antécédent dans E, c'est à dire si, pour tout $y \in F$, il existe *exactement un seul* $x \in E$ tel que $f(x) = y$. De façon équivalente f est ***bijective*** si f est à la fois une injection et une surjection.

2.2 Fonctions réelles injectives, surjectives, bijectives, applications réciproques

On se donne une fonction réelle $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et deux ensembles $E, F \subseteq \mathbb{R}$. On suppose que f est bien définie sur E, c'est à dire que E est inclus dans $\mathcal{D}_f$. On peut donc écrire $f\colon E \subseteq \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On peut interpréter visuellement les notions précédentes à l'aide du graphe de f sur E : $\Gamma_{f,E} = \{(x, f(x)) : x \in E\} \subseteq \Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}_f\}$. Plus précisément :

Règle graphique pour déterminer les fonctions réelles injectives, surjectives et bijectives.

1. La fonction $f : E \to F$ est *injective* si, pour tout $b \in F$, la droite horizontale d'équation $y = b$ intersecte le graphe $\Gamma_{f,E}$ de f sur E en *au plus* point.
2. La fonction $f : E \to F$ est *surjective* si, pour tout $b \in F$, la droite horizontale d'équation $y = b$ intersecte le graphe $\Gamma_{f,E}$ de f sur E en *au moins* un point.
3. La fonction $f : E \to F$ est *bijective* si, pour tout $b \in F$, la droite horizontale d'équation $y = b$ intersecte le graphe $\Gamma_{f,E}$ de f sur E en *exactement* un point.

Exemple 2.2.1 (Divers exemples et contrexemples)**.** Ces exemples illustrent l'importance des ensembles E et F dans les définitions précédentes.

1. La fonction $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est ni injective ni surjective. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ est surjective, mais pas injective. En revanche, la fonction $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ est bijective : pour tout $y \in [-1, 1]$, il existe un unique $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x = y$.
2. La fonction $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective, mais pas surjective : le nombres réels négatifs ou nuls n'ont pas d'antécédent par exp. En revanche, la fonction $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est bijective : pour tout $y > 0$, il existe un un seul nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) = y$. Ce nombre x est bien connu : c'est $\ln y$.
3. La fonction $\tan\colon \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ est surjective, mais pas injective : la fonction tan est périodique (de période π), elle ne peut pas être injective. En revanche, la fonction $\tan\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est bijective. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique nombre $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x = y$. A nouveau, ce nombre est bien connu : c'est $\arctan y$.

Remarque 2.2.2. Les exemples précédents illustrent la remarque empirique suivante :

1. On rend "plus facilement" une fonction injective en réduisant son domaine de départ.
2. De même, on rend "plus facilement" une fonction surjective en réduisant l'ensemble d'arrivée.

On voit également qu'une fonction $f\colon E \to F$ est bijective lorsque à tout élément $y \in F$ on peut associer *de façon unique* un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or, pouvoir associer de façon unique à tout élément d'un ensemble un élément d'un autre ensemble est exactement la définition d'une fonction. On en déduit :

Définition 2.2.3. Soit $f\colon E \to F$ une bijection. La fonction de F dans E qui a tout élément $y \in F$ associe l'unique élément x de E tel que $f(x) = y$ s'appelle l'***application réciproque*** de f. On la note en général f^{-1}. On a donc :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "f"] & F \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Remarque 2.2.4. Si $f\colon E \to F$ est une bijection, de bijection réciproque f^{-1}, on a par définition :

$$\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x \text{ et } \forall y \in F, f\left(f^{-1}(y)\right) = y.$$

Autrement dit :$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$, où Id_E est la fonction *identité* de E définie par $\mathrm{Id}_E(x) = x$ pour tout $x \in E$, et Id_F est définie de façon analogue sur F.

Exemple 2.2.5. On a vu plus haut que la fonction $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ est une bijection ; sa fonction réciproque est $\arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. De même, la fonction $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une bijection dont la fonction réciproque est la la fonction $\ln\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

Les fonctions réciproques satisfont la propriété remarquable suivante, qui permet de tracer leur graphe si on connaît le graphe de la fonction dont elles sont la réciproque :

Proposition 2.2.6. *Soit $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to F \subseteq \mathbb{R}$ une bijection. Alors le graphe $\Gamma_{f^{-1}}$ de la fonction réciproque $f^{-1} : F \to E$ est le symétrique du graphe Γ_f de f par rapport à la "première diagonale" (qui est l'ensemble $\{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$.*

2.3 Lien avec la résolution des équations

On considère une fonction $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to F \subseteq \mathbb{R}$, et on se demande comment montrer, pratiquement, que f est une injection, une surjection, ou une bijection. Cela revient à se poser la question suivante : *étant donné $y \in F$, combien de solutions l'équation $f(x) = y$ admet-elle de solutions ?* Ici, il est bon de voir y comme un *paramètre* de l'équation, et de voir x comme l'*inconnue* de l'équation. Ainsi, on peut formuler la réponse de la façon suivante :

1. Si, pour tout paramètre $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet *au plus* une solution $x \in E$, alors la fonction $f : E \to F$ est injective.
2. Si, pour tout paramètre $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet *au moins* une solution $x \in E$, alors la fonction $f : E \to F$ est surjective.
3. Enfin, si pour tout paramètre $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet *exactement* une solution $x \in E$, alors la fonction $f\colon E \to F$ est bijective.

Naturellement, une méthode possible pour traiter un tel problème est de résoudre l'équation $f(x) = y$ en l'inconnue y. Mais, d'une part, ça n'est pas toujours possible, si la fonction f est trop compliquée. D'autre part, cela peut s'avérer inutilement compliqué : après tout, on ne s'intéresse pas ici à la *valeur* des solutions de cette équation, mais à leur *nombre*. Y en a-t-il zéro, une seule, ou d'avantage ?

Exemple 2.3.1. Ilustrons l'approche ci-dessus avec l'exemple suivant (voir Figure 2.3.1) : $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (*rem* : on note que f est une fonction *impaire*). Pour $y \in \mathbb{R}$, combien l'équation $f(x) = y$ (en l'inconnue x) admet-elle de solutions ? Cette équation s'écrit $\dfrac{x}{x^2+1} = y$, ou encore $yx^2 - x + y = 0$. On voit que si $y = 0$, alors cette équations devient $x = 0$. Autrement dit le point $y = 0$ admet l'unique antécédent $x = 0$ par f.

En revanche, si $y \neq 0$, il s'agit d'une équation de degré 2 en l'inconnue x. Le *discriminant* de cette quantité (par rapport à x) est $\Delta = 1 - 4y^2 = (1-2y)(1+2y)$. On en déduit :

1. Si $y \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ alors $\Delta < 0$: l'équation $f(x) = y$ n'admet aucune solution. Autrement dit, aucun point de l'ensemble $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ n'admet d'antécédent par f.

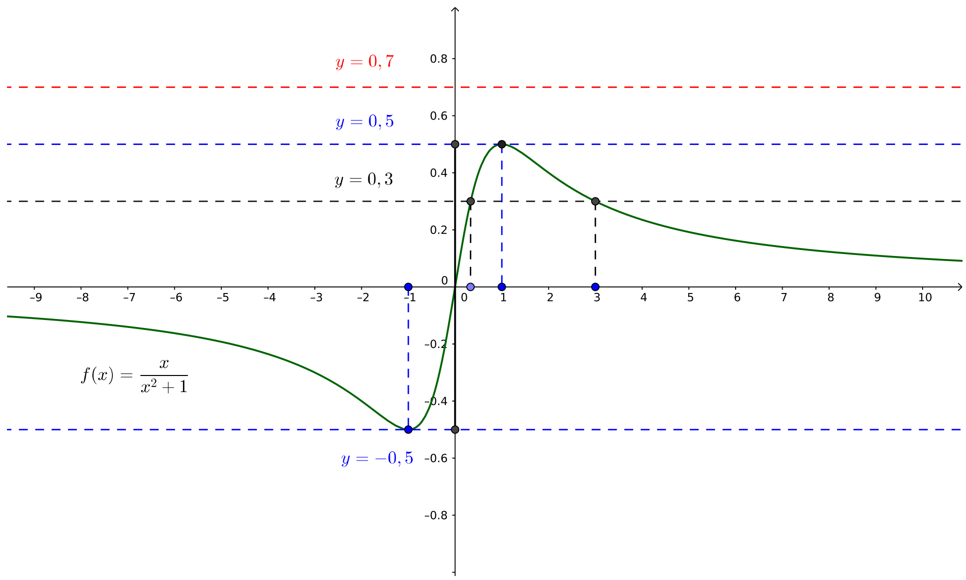


FIGURE 2.3.1 – $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

2. Si $y = \pm\frac{1}{2}$, alors $\Delta = 0$: l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution. Les points $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ admettent chacun exactement un antécédent par f. Un calcul immédiat (*exercice*) montre que $f(1) = \frac{1}{2}$ et $f(-1) = -\frac{1}{2}$.
3. Si $y \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{2}\right[$, alors $\Delta > 0$: l'équation $f(x) = y$ admet exactement deux solutions. Tout point de $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{2}\right[$ admet exactement deux antécédents par f.

Donc l'ensemble $f(\mathbb{R}) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ est l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Remarque 2.3.2. Nous verrons dans la suite du cours une autre approche, utilisant la notion de dérivée et de fonction monotone, pour aborder ce type de question : ce sera le point 4. du Programme Général.

3 Limites, continuité et dérivabilité des fonctions réelles

Cette section est dédiée à l'étude du point 3. du Programme Général.

3.1 Limites des fonctions réelles

3.1.1 Définitions

Notation 3.1.1. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. On désigne par I_{x_0} l'intervalle I ***épointé en*** x_0, c'est à dire l'ensemble $\{x \in I : x \neq x_0\}$.

Définition 3.1.2 (*limite d'une fonction en un point*)**.** Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, x_0 un élément de I et $f \colon I_{x_0} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f ***a pour limite*** ℓ ***quand*** x ***tend vers*** x_0 (ou que $f(x)$ ***tend vers*** ℓ ***quand*** x ***tend vers*** x_0) si, pour tout $r > 0$, il existe un nombre $h > 0$ tel que :

$$x \in I_{x_0} \text{ et } |x - x_0| < h \Longrightarrow |f(x) - \ell| < r.$$

On écrit :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Remarque 3.1.3.
1. Cette définition dit intuitivement que les valeurs de $f(x)$ vont se situer "aussi près qu'on le veut" de ℓ, du moment que x est suffisamment près de x_0.

2. Il est important de noter, pour cette définition, qu'il n'est pas nécessaire que f soit définie au point x_0.
3. En fait, même si f est bien définie au point x_0, la valeur $f(x_0)$ n'a aucune importance. En particulier, on ne demande pas que la limite ℓ de f au point x_0 soit égale à $f(x_0)$.
4. On n'utilise pas beaucoup cette définition dans la pratique. On utilise plutôt des limites "bien connues", et des règles générales sur les limites des fonctions pour montrer l'existence, et calculer, les limites en un point d'une fonction donnée.

De la même façon, on définit la limite à droite et la limite à gauche d'une fonction réelle en un point :

Définition 3.1.4 (limites à droite et à gauche en un point)**.** 1. Soit $f\colon\ ]a, x_0[\ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f ***tend vers*** ℓ ***quand*** x ***tend vers*** x_0 ***à gauche***, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ si, pour tout $r > 0$, il existe $h > 0$ tel que $a < x_0 - h$ et :

$$x_0 - h < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - \ell| < r.$$

2. Soit $f\colon\ ]x_0, b[\ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f ***tend vers*** ℓ ***quand*** x ***tend vers*** x_0 ***à droite***, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ si, pour tout $r > 0$, il existe $h > 0$ tel que $x_0 + h < b$ et :

$$x_0 < x < x_0 + h \Longrightarrow |f(x) - \ell| < r.$$

Exemple 3.1.5. Un fonction peut tout à fait admettre des limites à droite et à gauche différentes en un même point. Par exemple, la fonction *partie entiere*, qu'on peut noter E, vérifie, pour tout point entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{x \to n^+} \mathrm{E}(x) = n \text{ et } \lim_{x \to n^-} \mathrm{E}(x) = n - 1.$$

Remarque 3.1.6.
1. Il est clair que si une fonction f admet *la même limite* $\ell \in \mathbb{R}$ a droite et à gauche au point $x_0 \in \mathbb{R}$, alors f admet la limite ℓ au point x_0.

Exercice 3.1.7. Si $\mathcal{D}_f =]a, x_0]$, et si $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 par la gauche, alors, puisque on ne peut considérer les valeurs de $f(x)$ pour x supérieur à x_0, on dira simplement que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 (sans mentionner par la gauche). On a bien sûr la remarque analogue si $\mathcal{D}_f = [x_0, b[$.

La limite à droite ou à gauche d'une fonction en un point peut également être infinie :

Définition 3.1.8 (limite infinie en un point)**.** 1. Soit $f\colon\ ]a, x_0[\ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ ***tend vers*** $+\infty$ ***quand*** x ***tend vers*** x_0^- (*resp.* $f(x)$ ***tend vers*** $-\infty$ ***quand*** x ***tend vers*** x_0^-) si, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $h > 0$ tel que $a < x_0 - h$ et :

$$x_0 - h < a < x_0 \Longrightarrow A < f(x) \ \ (\textit{resp. } f(x) < A).$$

2. Soit $f\colon\ ]x_0, b[\ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ ***tend vers*** $+\infty$ ***quand*** x ***tend vers*** x_0^+ (*resp.* $f(x)$ ***tend vers*** $-\infty$ ***quand*** x ***tend vers*** x_0^+) si, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $h > 0$ tel que $x_0 + h < b$ et :

$$x_0 < x < x_0 + h \Longrightarrow A < f(x) \ \ (\textit{resp. } f(x) < A).$$

Dans les deux cas, on dit que le graphe Γ_f de f présente une ***asymptote verticale*** au point $x = x_0$.

Remarque 3.1.9. Une fonction peut tout à fait admettre une limite finie quand x tend vers x_0 par l'un des côtés de x_0, et une limite finie quand $x \to x_0$ par l'autre côté (voir Exemple 3. ci-dessous).

Exemple 3.1.10.
1. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.
2. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
3. Si
$$f : x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$
alors $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Enfin, on peut également parler de limites, finies ou infinies, quand x tend vers l'infini :

Définition 3.1.11 (limites à l'infini)**.** . Soit $f\colon \left]a,+\infty\right[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ si, pour tout $r > 0$, il existe $A > a$ tel que :
$$x > A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < r.$$
2. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si pour tout $B \in \mathbb{R}$, il existe $A > a$ tel que :
$$x > A \Longrightarrow f(x) > B.$$
3. On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, si pour tout $B \in \mathbb{R}$, il existe $A > 0$ tel que :
$$x > A \Longrightarrow f(x) < B.$$
4. Il y a naturellement des définitions analogues lorsque $x \to -\infty$, dont les détails sont laissés au lecteur.

Exemple 3.1.12.

1. $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$; $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$; $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
2. $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$; $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

3.1.2 Propriétés générales des limites de fonctions

Proposition 3.1.13 (Unicité de la limite)**.** *Si une fonction a une limite (ou une limite à droite ou à gauche) en un point, cette limite est unique. On peut donc parler de "la" limite (ou de "la" limite à droite ou à gauche) d'une fonction en un point.*

Proposition 3.1.14 (comparaison de limites)**.** *Soient $f, g\colon I_{x_0} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que $f \leq g$ sur I_{x_0}, c'est à dire telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I_{x_0}$. On suppose que les fonctions f et g admettent une limite quand x tend vers x_0. Alors :*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Remarque 3.1.15.

1. L'énoncé de la proposition reste vrai si on parle de limites à droite ou à gauche, ou si $x_0 = \pm\infty$, et même si les limites de f et g sont infinies (on considère bien sûr que $-\infty < x < +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).
2. Attention : même si les inégalités de l'hypothèse de la proposition sont strictes, les inégalités de la conclusion sont larges : en général, l'hypothèse $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in I_{x_0}$ n'implique pas $\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x)$. Par exemple, si $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $g\colon x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont considérées sur l'intervalle $\left]1,+\infty\right[$, on a $f(x) < g(x)$ sur I, mais $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = 1$ et, également, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

On déduit facilement de la proposition précédente le théorème bien connu suivant :

Théorème 3.1.16 (d'encadrement, dit "des gendarmes")**.** *On considère trois fonctions f, g, et h définies sur l'intervalle épointé $I_{x_0} \subseteq \mathbb{R}$ telles que $f \leq g \leq h$ sur I_{x_0} (c'est à dire telle que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in I_{x_0}$). On suppose que f et h ont la même limite ℓ quand x tend vers x_0. Alors $g(x)$ tend également vers ℓ quand x tend vers x_0.*

Remarque 3.1.17. A nouveau, le résultat précédent reste vrai pour les limites à droite ou à gauche, ou bien si $x_0 = +\infty$ ou $x = -\infty$, ou bien si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

Dans le même esprit, on a un résultat utile dans le cas des fonctions monotones.

Définition 3.1.18. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

1. La fonction f est ***croissante*** sur I si, pour tous $x, y \in I$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$.
2. La fonction f est ***décroissante*** sur I si, pour tous $x, y \in I$ tels que $x \leq y$, on $f(x) \geq f(y)$.
3. La fonction f est ***strictement croissante*** sur I si, pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$.
4. La fonction f est ***strictement décroissante*** sur I si, pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$, on $f(x) > f(y)$.

Dans les deux premiers cas, la fonction f est dite ***monotone***. Dans les deux derniers cas, elle est dite ***strictement monotone***.

Définition 3.1.19. Soient $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, M et m deux nombres réels.

1. On dit que f est ***majorée par*** M si, pout tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a $f(x) \leq M$.
2. De même, on dit que f est ***minorée par*** m si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a $m \leq f(x)$.
3. Une fonction est ***bornée*** si elle est à la fois minorée et majorée. Il est équivalent de dire que $|f|$ est majorée.

Une application immédiate des résultats ci-dessus mène à :

Proposition 3.1.20. *Soient $f\colon I_{x_0} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, M et m deux nombres réels. On suppose que $f(x)$ tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0. On a :*

1. *Si f est majorée par M, alors $\ell \leq M$.*
2. *Si f est minorée par m, alors $m \leq \ell$.*

Remarque 3.1.21.

1. Comme précédemment, ce resultat est également valable pour les limites à droite ou à gauche, et pour les limites quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
2. Même si f est *strictement majorée* par M (ou *strictement minorée* par m), on ne peut en déduire uniquement que sa limite est *inférieure ou égale* à M (ou *supérieure ou égale* à m).

3.1.3 Opérations sur les limites de fonctions

Nous résumons dans cette section les résultats usuels concernant les opérations sur les limites de fonctions. Nous adoptons pour cela quelques conventions :

1. $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$, $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
2. Si $a > 0$, alors : $a \times (+\infty) = +\infty$, $a \times (-\infty) = -\infty$, $a \times 0^+ = 0^+$, $a \times 0^- = 0^-$
3. Si $a < 0$, alors : $a \times (+\infty) = -\infty$, $a \times (-\infty) = +\infty$, $a \times 0^+ = 0^-$, $a \times 0^- = 0^+$
4. $\dfrac{1}{+\infty} = 0^+$, $\dfrac{1}{-\infty} = 0^-$, $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$, $\dfrac{1}{0^-} = -\infty$
5. Pour tout $a \in \mathbb{R}$; $a + (+\infty) = +\infty$, $a + (-\infty) = -\infty$
6. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
7. $0^{\pm} \times (\pm\infty)$, $\dfrac{0^{\pm}}{(0^{\pm})}$, $\dfrac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$, $(+\infty) + (-\infty)$ sont indéterminés
8. Pour tous les symboles α et β des points précédents : $\alpha \times \beta = \beta \times \alpha$

Proposition 3.1.22. *Soient $f, g\colon I_{x_0} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = k$. Ici $\ell, k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On a :*

1. $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell + k$ *;* $\lim_{x\to x_0} (f(x)\, g(x)) = \ell \times k$.
2. *Si $f(x) \neq 0$ pour $x \in I_{x_0}$* , $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$.

Remarque 3.1.23. Les cas correspondants au point 7. des conventions ci-dessus s'appellent ***limites indéterminées***. Il possible souvent (mais pas toujours) possible de lever ces indéterminations.

Exemple 3.1.24. On considère la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On a $\lim_{x\to 1} P(x) = P(1) = 0$ et $\lim_{x\to x_0} Q(x) = Q(1) = 0$. Donc, a priori, la limite de $f(x)$ au point $x_0 = 1$ est indéterminée. Mais on observe que $P(x) = (x-1)(x-2)$ et $Q(x) = (x-1)(x+1)$. Donc pour $x \neq 1$ on a $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$. Donc $\lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1-2}{1+1} = -1$.

3.1.4 Quelques limites classiques

Ces limites classiques lèvent les indéterminations dans beaucoup de cas utiles. Leur maîtrise et celle des opérations sur les limites de fonctions est essentielle pour être capable de calculer la limite d'une fonction donnée (de la plupart d'entre elles, en fait). Nous verrons dans un autre chapitre des techniques plus élaborées pour l'étude des limites et du comportement asymptotique des fonctions.

Proposition 3.1.25 (limites classiques en 0)**.**

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0^\pm} (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^\alpha \text{ (pour } \alpha \in \mathbb{R}),$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0^\pm} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \text{ (pour } a > 0), \quad \lim_{x\to 0^\pm} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \text{ (pour } \alpha \in \mathbb{R}).$$

Remarque 3.1.26. Certaines de ces limites se déduisent des autres. Par exemple $f(x) = (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+\alpha x)\right)$. En posant $u = \alpha x$, on a :

$$\frac{1}{x}\ln(1+\alpha x) = \frac{\alpha}{u}\ln(1+u).$$

Or quand x tend vers $0^\pm$, alors $u = \alpha x$ tend également vers $0^\pm$. Donc, d'après la quatrième limite de la liste : $\frac{\alpha}{u}\ln(1+u) \underset{u\to 0^\pm}{\longrightarrow} \alpha$. Ainsi $f(x)$ tend vers $\exp(\alpha) = \mathrm{e}^\alpha$ quand x tend vers $0^\pm$.

Poser $u = \alpha x$ s'appelle procéder à un *changement de variables* : c'est une méthode très fréquente dans le calcul des limites.

Un autre ensemble de limites classiques, quand x tend vers l'infini, concerne d'une part l'exponentielle et le logarithme, et d'autre part les fractions rationnelles :

Proposition 3.1.27 (comparaison exponentielle, logarithme, et puissances)**.** *On a :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^a} = +\infty, \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0, \ (a > 0)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x x^a = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x)\, x^a = 0, \quad (a > 0)$$

Proposition 3.1.28. *On considère deux polynômes à coefficients réels* $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$ *et* $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$*, avec* $a_m \neq 0$ *et* $b_n \neq 0$*. Alors :*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ \frac{a_m}{b_n} & \text{si } m = n \\ \pm\infty & \text{si } m > n. \end{cases}$$

Dans le dernier cas, on choisit entre $+\infty$ *et* $-\infty$ *par une application immédiate de la règle des signes.*

Remarque 3.1.29. Les limites classiques précédentes sont données lorsque x tend vers $0^\pm$. Elles peuvent permettre toutefois de déterminer des limites quand x tend vers $\pm\infty$, en procédant au besoin à un ou plusieurs changements de variables.

Exemple 3.1.30. Soit $f : x \mapsto (1 + x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$, définie pour $x > 0$. On demande de calculer, si elle existe, la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$. On écrit :

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x+\sin x)\right).$$

Or $g(x) = \ln(1+x+\sin x) = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)\right) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)$. On pose $u = \frac{1}{x} + \frac{\sin x}{x}$. On voit que u tend vers 0^+ quand x tend vers $+\infty$,et donc que $\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x}\right) = \ln(1+u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi :

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)}{x}$$

est la somme de deux fonctions qui tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

3.1.5 Fonctions équivalentes

Une notion fondamentale, et très commode, lors du calcul des limites, est la notion de *fonctions équivalentes.*

Définition 3.1.31. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit que deux fonctions réelles sont ***équivalentes*** quand x tend vers x_0, et on note $f \underset{x_0}{\sim} g$ (ou $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$), si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1$.

Remarque 3.1.32. Cette définition sous-entend évidemment que le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bien défini pour x au voisinage de x_0. En particulier f et g doivent être définies et non nulles sur un intervalle épointé I_{x_0}, ou sur un intervalle $[a, x_0[$ ou $]x_0, b]$.

La notion d'équivalent est particulièrement pertinente dans l'énoncé suivant, qui rend commode le calcul de certaines limites, et permet de lever quelques indéterminations :

Proposition 3.1.33. *On considère deux fonctions réelles f et g.*

1. *Si $f \underset{x_0}{\sim} g$, et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.*
2. *Soient f et g deux fonctions qui tendent vers l'infini quand x tend vers x_0, telles que f domine g au voisinage de x_0, c'est à dire que $\dfrac{g(x)}{f(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. Alors $f + g \underset{x_0}{\sim} f$.*
3. *Soient f_1 et g_1 deux fonctions réelles telles que $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$, alors $f \cdot g \underset{x_0}{\sim} f_1 \cdot g_1$ et $\dfrac{f_1}{g_1} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{f_2}{g_2}$. En particulier, $\dfrac{1}{g_1} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{1}{g}$.*

Exemple 3.1.34.

1. Soit $f(x) = \mathrm{e}^x - x^3$. On demande $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Puisque $\dfrac{x^3}{\mathrm{e}^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x$ et donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Si $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$ avec $a_d \neq 0$, alors $P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_d x^d$.
3. Si $f(x) = \dfrac{a_m x^m + \cdots + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_0}$ avec $a_m \neq 0$ et $b_n \neq 0$, alors $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n}$.

Remarque 3.1.35 (IMPORTANTE). Dans la détermination de la limite d'une *somme* de deux fonctions, contrairement au cas des produits ou des quotients, *on ne peut pas remplacer l'une des fonctions par une fonction équivalente.* Par exemple, si $f \colon x \mapsto x^2 + x$ et $g \colon x \mapsto x^2$, alors $h(x) = f(x) - g(x) = x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Or $f \underset{+\infty}{\sim} g$: si on avait remplacé f par la fonction équivalente $f_1 = g$, on aurait trouvé $f_1 - g = 0$, qui ne tend évidemment pas vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

3.2 Continuité des fonctions réelles

3.2.1 Définitions et premières propriétés des fonctions continues

Définition 3.2.1.

1. Soient $f \colon]a, b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$. On dit que f est ***continue au point*** x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. Une fonction réelle $f \colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite ***continue*** si elle est continue en tout point de $\mathcal{D}_f$.

Une partie des résultats sur la continuité des fonctions est une conséquence directe des propriétés sur les limites. Ils disent essentiellement que l'ensemble des fonctions continues est stable par les opérations usuelles. C'est ainsi qu'on montre la plupart du temps la continuité d'une fonction donnée : on montre qu'elle est obtenue à partir de fonctions continues "classiques" à l'aide d'opérations standard :

Proposition 3.2.2 (Stabilité des fonctions continues par les opérations usuelles)**.**

1. *La somme, la différence et le produit de deux fonctions continues sur un intervalle sont également continues.*
2. *Le quotient d'une fonction continue par une fonction continue qui ne s'annule pas est continue.*
3. *La composée de deux fonctions continues est continue.*
4. *La réciproque d'une fonction continue bijective est continue.*

Cette proposition, jointe à la suivante, permet de montrer simplement la continuité de quantité de fonctions :

Proposition 3.2.3. *Les fonctions $x \mapsto x^a$ ($a \in \mathbb{R}$), exponentielle, logarithme, sinus, cosinus, et les fractions rationnelles sont continues sur leurs ensembles de définition.*

Remarque 3.2.4. Bien que la plupart des fonctions classiques soient continues sur leur domaine de définition, il y a cependant une fonction classique qui ne l'est pas. Il s'agite de la fonction *partie entière*, notée en général $\mathrm{E} : x \in \mathbb{R} \to \mathrm{E}(x)$, qui à tout nombre réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, mais elle est discontinue en chaque point de $\mathbb{Z}$. En effet, si $n \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{E}(n) = n$ mais $\lim_{x\to n^-} \mathrm{E}(x) = n - 1$.

Exemple 3.2.5. La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ est continue sur $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

On peut parfois prolonger une fonction discontinue en une fonction continue :

Proposition 3.2.6 (prolongement par continuité)**.** *Soient I_{x_0} un intervalle épointé en x_0 et $f\colon I_{x_0} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si les limites $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ et $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ existent et sont égales au nombre $\ell \in \mathbb{R}$, alors la fonction définie sur I par*

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est une fonction continue, appelée le ***prolongement par continuité*** *de f en x_0.*
Si $f\colon]a, x_0[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et $\ell = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, alors la fonction obtenue comme précédemment en posant $f(x_0) = \ell$ est une fonction continue, appelée également le ***prolongement par continuité*** *(à gauche) de f en x_0. On définit de la même façon le prolongement par continuité à droite.*

3.2.2 Le théorème des valeurs intermédiaires

Après avoir étudié la notion de continuité d'une fonction en un point à l'infini, on étudie dans cette section les propriété des fonctions continues sur un intervalle.

Théorème 3.2.7 (Valeurs intermédiaires)**.** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.On donne deux formulations équivalentes du théorème.*

1. **(Formulation 1)** *L'image $f(I)$ de f par la fonction f est un intervalle de $\mathbb{R}$.*
2. **(Formulation 2)** *Soient $a, b \in I$ tels que $a \leq b$. Alors, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.*
3. **(Formulation 3)** *Soient $a, b \in I$ tels que $a \leq b$. Alors la fonction $f\colon [a, b] \subseteq I \to [f(a), f(b)]$ est surjective.*

Remarque 3.2.8. La Formulation 2 du Théorème des valeurs intermédiaires reste vraie si a et b sont les extrémités de l'intervalle I, même si ces points n'appartiennent pas I ou si a ou b sont égaux à $\pm\infty$. Dans ce cas, il faut bien sûr remplacer $f(a)$ par $\ell = \lim_{x\to a^+} f(x)$ et $f(b)$ par $L = \lim_{x\to b^-} f(x)$ (à condition, bien sûr, que ces limites existent) : *si $I =]a, b[$, alors, pour tout y strictement compris entre ℓ et L, il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = y$.*

Exemple 3.2.9.

1. Pour tout $y \in [-1, 1]$, il existe $x \in [0, \pi]$ tel que $\cos x = y$.
2. Pour tout $y \in]-\infty, +\infty[$, il existe $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x = y$.
3. Pour tout $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, il existe $x \in]-\infty, +\infty[$ tel que $\arctan x = y$.
4. Pour tout $y \in]0, +\infty[$, il existe $x \in]-\infty, \infty[$ tel que $\exp(x) = y$.

Le théorème des valeurs intermédiaires admet le corollaire suivant, utile pour le traitement des équations :

Corollaire 3.2.10. *Soit $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue. Alors :*
1. *Si $I = [a, b]$, et si $f(a) f(b) \leq 0$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$.*
2. *Si $I =]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, si $\ell = \lim_{x \to a^+} f(x)$ et $L = \lim_{x \to b^-} f(x)$ existent, et si $\ell \cdot L < 0$, alors il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = 0$. Ici, le produit $\ell \cdot L$ est calculé avec les règles de calcul de la section 3.1.3.*

La troisième formulation du théorème des valeurs intermédiaires peut-être précisée comme suit :

Théorème 3.2.11 (de la bijection)**.** *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et strictement monotone (voir Définition 3.1.18). Alors :*
1. *f induit une bijection de I sur $f(I)$.*
2. *De plus, si bijection réciproque $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est continue sur $f(I)$, strictement monotone et de même sens de variation que f.*

Exemple 3.2.12.
1. La fonction $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ est une fonction continue strictement décroissante et bijective. Donc sa fonction réciproque $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$ est également continue et strictement décroissante.
2. La fonction $\log\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue, strictement croissante et bijective. Donc sa fonction réciproque $\exp\colon \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est également continue et strictement décroissante.

Il reste un dernier résultat fondamental sur les fonctions continues définies sur un intervalle borné :

Théorème 3.2.13 (des valeurs extrêmes)**.** *Soit $f\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :*
1. *la fonction f est bornée (voir Définition 3.1.19).*
2. *Il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0)$ soit la plus petite valeur de f sur $[a, b]$. Il existe $x_1 \in [a, b]$ tel que $f(x_1)$ soit la plus grande valeur de f sur $[a, b]$.*

Remarque 3.2.14. Il est essentiel dans cet énoncé que la fonction continue f soit définie sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$.
1. Par exemple la fonction $\exp\colon]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$ est *minorée* (car $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$), mais pas *majorée* (car $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$). En revanche, la restriction de la fonction exp à l'intervalle fermé et borné $[0, 1]$ est minorée par $\exp(0) = 1$ et majorée par $\exp(1) = \mathrm{e}$.
2. De même, la fonction $\cos\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ est minorée par $\cos(\pi) = -1$ et majorée par $\cos(0) = 1$.
3. Attention, une fonction continue $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ n'atteint pas forcément ses valeurs extrêmes aux extrémités de l'intervalle $[a, b]$. Par exemple, la valeur maximale de la fonction $\cos\colon \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ est atteinte au point 0 : $\cos(0) = 1$.

3.3 Dérivabilité des fonctions réelles

Nous en arrivons au point 4. du Programme Général. L'idée fondamentale de l'étude d'une fonction réelle $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de "découper" (on dit plutôt "partitionner") son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ en un nombre fini d'intervalles, bornés ou non, sur lesquels la fonction f est continue et monotone, et donc bijective. Il y a un outil pour cela, qui est la ***dérivée*** de la fonction : il est bien connu, comme nous le verrons dans cette section, que les *variations* de la fonction f sont liées au *signe* de la dérivée de f.

Comme pour l'étude de la continuité des fonctions, nous partageons cette section en deux sous-sections :
1. les définitions et le premières propriétés des fonctions dérivables
2. une étude plus précise, liant signe de la dérivée et sens de variation de la fonction.

3.3.1 Dérivabilité d'une fonction en un point

Définition 3.3.1. Soient $]a,b[\subset\mathbb{R}$, $x_0\in]a,b[$ et $f\colon\ ]a,b[\to\mathbb{R}$.

1. On dit que f est ***dérivable au point*** x_0 si
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
existe dans $\mathbb{R}$. On note alors $f'(x_0)$ ce nombre, qu'on appelle ***dérivée de*** f ***en*** x_0.
2. La fonction f est dite ***dérivable sur*** $]a,b[$ si f est dérivable en tout point de $]a,b[$. La fonction f'définie sur $]a,b[$ par par $x\mapsto f'(x)$ s'appelle la ***fonction dérivée*** de f.

Comme pour la continuité, il existe une notion de *dérivée à droite* et de *dérivée à gauche.*

Définition 3.3.2. Soit $f\colon\ [x_0,b[\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est ***dérivable à droite au point*** x_0 si
$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
existe dans $\mathbb{R}$. On note alors cette $f'_{\mathrm{d}}(x_0)$ cette limite, qu'on appelle la ***dérivée à droite de*** f ***au point*** x_0. On définit de façon analogue la ***dérivée à gauche*** $f'_{\mathrm{g}}(x_0)$.

Exemple 3.3.3. La fonction *valeur absolue,* $x\mapsto|x|$ est dérivable en tout point $x_0\neq 0$. On a également $f'_{\mathrm{d}}(0)=1$ et $f'_{\mathrm{g}}(0)=-1$.

Proposition 3.3.4 (Lien avec la continuité)**.** *Si la fonction* $f\colon\ ]a,b[\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *est dérivable au point* $x_0\in]a,b[$*, alors* f *est continue au point* x_0*. Attention, la réciproque n'est pas vraie.*

Exemple 3.3.5 (fonctions continues et non dérivables)**.**

1. La fonction valeur absolue est l'exemple typique d'une fonction, qui est bien continue en tout point (donc en particulier au point $0\in\mathbb{R}$), mais qui n'est pas dérivable en ce point car $f'_{\mathrm{g}}(0)\neq f'_{\mathrm{d}}(0)$.
2. Soit $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une composée de fonctions continues). Mais elle n'est pas dérivable au point 1. En effet :
$$\frac{g(1+h)}{h}=\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=\frac{1}{h^{2/3}}\underset{h\to 0^+}{\longrightarrow}+\infty,$$
ce qui prouve que g n'est pas dérivable au point 1.

Définition 3.3.6. Soit $f\colon\ ]a,b[\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $x_0\in]a,b[$. Alors la droite d'équation $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ s'appelle la ***droite tangente*** au graphe Γ_f de f au point d'abscisse x_0.

Comme pour la continuité, on démontre le plus souvent la dérivabilité d'une fonction donnée à l'aide des deux propositions suivantes :

Proposition 3.3.7. *Les fonctions* $f_a\colon x\mapsto x^a$ $(a\in\mathbb{R})$*, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus, et les fractions rationnelles sont dérivables sur leur domaine de définition. On a :*
$$f'_a(x)=ax^{a-1},\quad \exp'(x)=\exp(x),\quad \ln'(x)=\frac{1}{x},\quad \sin'(x)=\cos(x),\quad \cos'(x)=-\sin(x),$$

Proposition 3.3.8 (stabilité des fonctions dérivables par les opérations usuelles)**.**

1. *Soient $f, g\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors :*
   (a) la somme, la différence et le produit de f et g sont dérivables et :
   $$(f+g)' = f' + g', \quad (f-g)' = f' - g', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$
   (b) si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, on a :
   $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}; \text{ en particulier : } \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$
2. *Si $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et g sont deux fonctions dérivables telle que la composée $g \circ f$ est bien définie sur $\mathcal{D}$, alors $g \circ f$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et, pour tout $x \in \mathcal{D}$;*
   $$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$
3. *Si $f\colon I \to J$ est une bijection dérivable, alors l'application réciproque f^{-1} est également dérivable pour tout point $x \in J$ tel que $f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0$ et, pour tout $x \in J$, on a :*
   $$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Exemple 3.3.9. Il est impératif de retenir les formules 1. et 2. En revanche, on peut *à la rigueur* se dispenser de retenir, la formule 3., à condition d'être capable de la retrouver. Rappelons par exemple que la fonction $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$ est la réciproque de la fonction $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$. La fonction cos est dérivable (sur $\mathbb{R}$) et sa dérivée, la fonction $-\sin$, s'annule en $0 = \arccos(1)$ et $\pi = \arccos(-1)$. Donc on sait que la fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$. Pour calculer sa dérivée sans utiliser la formule 3., on écrit

$$\begin{aligned} \arccos(\cos x) &= x, \text{ donc} \\ \arccos'(\cos(x)) \cdot (\cos)'(x) &= 1, \text{ donc, en posant } y = \cos x \in]-1,1[\\ \arccos'(y) &= -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sin(\arccos y)}. \end{aligned}$$

Or, puisque $\sin^2(\arccos y) + \cos^2(\arccos y) = 1$, donc $\sin(\arccos y) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos y)} = \sqrt{1-y^2}$ (la fonction sin est positive sur $[0,\pi]$). Ainsi :

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Exemple 3.3.10. Soit $a > 0$. On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a^x$. Pour calculer la dérivée de f, on écrit $f(x) = \exp(x \ln a)$. Donc :

$$f'(x) = \exp'(x \ln a) \ln a = \exp(x \ln a) \ln a = x^a \ln a.$$

3.3.2 Dérivée, extrema locaux et monotonie

On étudie dans cette section le lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction réelle.

Définition 3.3.11 (extrema locaux)**.** Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f admet un ***maximum local*** (*resp.* un ***minimum local***) au point $c \in I$ s'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [c-r, c+r]$, $f(x) \leq f(c)$ (*resp.* $f(x) \geq f(c)$). Dans les deux cas, on dit que f admet un ***extremum local*** au point c.

Proposition 3.3.12. *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un extremum local en un point $c \in]a,b[$, alors $f'(c) = 0$.*

Remarque 3.3.13.

1. La réciproque de cette proposition n'est pas vraie. Par exemple, la dérivée de la fonction $x \mapsto x^3$ s'annule en $0 \in \mathbb{R}$, mais cette fonction ne présente pas d'extremum local en ce point.

2. Une fonction peut admettre un extremum local en un point sans y être dérivable. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ admet un minimum en 0 sans y être dérivable.

Pour déterminer plus précisément la nature des points où la dérivée s'annule, on dispose de l'énoncé suivant :

Proposition 3.3.14. *Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction* deux fois dérivable*, et soit $c \in I$ tel que Alors :*
1. *Si $f''(c) < 0$, la fonction f admet un maximum local au point c.*
2. *Si $f''(c) > 0$, la fonction f admet un minimum local au point c.*

Remarque 3.3.15. Si $f''(c) = 0$, on ne peut pas conclure :
1. Si $f\colon x \mapsto x^3$, on a $f''(0) = 0$ et f n'admet ni maximum local, ni minimum local en 0.
2. Si $f\colon x \mapsto x^4$, on a $f''(0) = 0$ et f admet un minimum local en 0.

La proposition suivante donne le lien entre le signe de la dérivée d'une fonction sur un intervalle, et le sens de variation de la fonction sur cette intervalle.

Proposition 3.3.16 (sens de variation et dérivée)**.** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :*
1. *Si $f'(x) \geq 0$ (*resp. $f'(x) > 0$*) pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I (*resp. *strictement croissante sur I).*
2. *Si $f'(x) \leq 0$ (*resp. $f'(x) < 0$*) pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I (*resp. *strictement décroissante sur I).*
3. *Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I.*

Remarque 3.3.17. A ce stade, le programme général est presque complètement achevé. Etant donnée une fonction, nous savons :
1. Déterminer le domaine de définition, et réduire son domaine d'étude en utilisant le propriétés remarquables de la fonction : périodicité, parité, symétries possibles de son graphe.
2. "Découper" son domaine d'étude, en étudiant le signe de sa dérivée, en intervalles sur lesquels la fonction est strictement monotone, et donc bijective.
3. Nous disposons de plusieurs techniques pour déterminer les limites de la fonction aux extrémités de chacun de ces intervalles.

Cependant, il peut arriver que certaines limites résistent à ces techniques. De plus, nous ne savons pas encore analyser le *comportement asymptotique* de la fonction aux extrémités des intervalles ci-dessus :son graphe se rapproche-t-il de droites, ou d'autres courbes classiques, qui lui tiennent alors lieu d'asymptotes ? Les méthodes nécessaires à la résolution de ces problèmes sont expliquées dans la section suivante.

4 Développements limités, formule de Taylor, et développements asymptotiques

Nous donnons dans cette section des techniques importantes permettant de compléter l'étude du point 3. du Programme Général.

4.1 Développements limités et formule de Taylor

L'idée de la notion de *développement limité* est d'approcher une fonction donnée, au voisinage d'un point, par un polynôme. Puisque le comportement limite d'un polynôme en tout point est bien connu, on en déduit le comportement limite de la fonction.

Définition 4.1.1. Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon I_{x_0} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un ***développement limité à l'ordre n en*** x_0 s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n et une fonction ε qui tend vers 0 à l'origine tels que, pour tout x au voisinage de x_0 :

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0).$$

Notation 4.1.2. Pour raccourcir l'écriture on note souvent $o\left((x - x_0)^n\right)$ toute fonction de la forme $(x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$. En particulier, si $x_0 = 0$, on notera $o(x^n)$. C'est une notation commode, à condition de la manipuler avec soin. Par exemple :

1. $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$. En effet :

$$\begin{aligned} o(x^n) + o(x^n) &= x^n \varepsilon_1(x) + x^n \varepsilon_2(x) = x^n (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)) \\ &= x^n \varepsilon(x) = o(x^n). \end{aligned}$$

2. $o(x^p) \cdot o(x^q) = o(x^{p+q})$. En effet :

$$\begin{aligned} o(x^p) \cdot o(x^q) &= x^p \varepsilon_1(x) \cdot x^q \varepsilon_2(x) = x^{p+q} \varepsilon_1(x) \varepsilon_2(x) \\ &= x^{p+q} \varepsilon(x) = o\left(x^{p+q}\right). \end{aligned}$$

3. On peut ainsi additionner et multiplier les $o(x)$. *Mais certainement pas les diviser*. Par contre on a : si $p \geq q$, $\dfrac{o(x^p)}{x^q} = o(x^{p-q})$. En effet :

$$\frac{o(x^p)}{x^q} = \frac{x^p \varepsilon(x)}{x^q} = x^{p-q} \varepsilon(x) = o\left(x^{p-q}\right).$$

4. La notation $o(1)$ représente une fonction de limite nulle. En effet :

$$o(1) = o\left(x^0\right) = x^0 \varepsilon(x) = \varepsilon(x).$$

Remarque 4.1.3.

1. Dans la définition de développement limité, l'approximation de f par le polynôme P_n au voisinage de x_0 peut donc s'écrire :

$$f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n).$$

   Cette approximation est d'autant plus précise que l'entier n est grand.
2. Si $n = 0$, on obient $f(x) = P_0(x) + o(1)$. $P_0(x)$ est un polynôme de degré 0, donc une constante, qu'on peut noter c. De plus, $o(1) = 1 \cdot \varepsilon(x - x_0)$ qui tend vers 0 quand x tend vers x_0. On a ainsi $f(x) = c + \varepsilon(x - x_0)$. Ainsi, $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} c$, et l'on peut prolonger f par continuité en posant $f(x_0) = c$.

Proposition 4.1.4. *Si la fonction f admet un développement limité à l'ordre n au point x_0, ce développement est unique.*

De façon générale, il s'agit donc, étant donnée une fonction$f$, d'être capable de donner un développement limité de f avec un ordre n aussi grand que nécessaire. L'outil remarquable qui permet d'y parvenir est le résultat suivant :

Théorème 4.1.5 (Formule de Taylor)**.** *Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si la fonction f et toutes ses dérivées existent et sont continues sur I, alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, donné par :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Exemple 4.1.6.

1. Déterminons le développement limité de la fonction exponentielle à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ en $x_0 = 0$. Toutes les dérivées successives de la fonction exponentielles sont égales à l'exponentielle. On déduite donc de la formule de Taylor :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp(0)}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

2. Considérons maintenant la fonction $f\colon \ln(1+x)$. On a :

$$f'(x) = (1+x)^{-1}, \quad f''(x) = -(1+x)^{-2}, \quad f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}, \quad f^{(4)}(x) = -2.3(1+x)^{-4}, \ldots$$

   On a ainsi $f(0) = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$. On déduit donc de la formule de Taylor que :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n).$$

Remarque 4.1.7. Si $n = 1$, la formule de Taylor donne :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o\left((x - x_0)^1\right).$$

On reconnait dans le polynôme $P_1(x) = f(x_0) + f'(x - x_0)(x - x_0)$ *l'équation de la droite tangente au graphe de f au point x_0*. La formule de Taylor permet ainsi de dire que l'équation de la droite tangente *approche à l'ordre* 1 la fonction f.

4.2 Méthodes de calcul des développements limités

On comprend aux travers des exemples ci-dessus que le calcul d'un développement limité en appliquant mécaniquement la formule de Taylor est toujours une ressource possible, mais qui peut mener à des calculs terriblement compliqués pour obtenir les dérivées successives de la fonction. On procède donc rarement ainsi. Bien qu'il soit bon de garder la formule de Taylor à l'esprit pour des explications ou des vérifications, on utilise plutôt :

1. La connaissance des développements limités, principalement à l'origine, d'une liste (courte) de fonctions classiques. Ces développements sont à retenir.
2. L'application de règles de calcul qui permettent de calculer les développements limités d'une somme, d'un produit d'un quotient, d'une composée de deux fonctions.

4.2.1 Développements limités de fonctions classiques.

On donne ici les développements limités à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ des fonctions classiques en $x_0 = 0$. Ils peuvent se retrouver, relativement facilement, par la formule de Taylor. On a :

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n\, x^n}{n} + o(x^n) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{2\,n}}{(2\,n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \text{ (avec } a \in \mathbb{R}) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\cosh(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \cdots + \frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\
\sinh(x) &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right).
\end{aligned}$$

Remarque 4.2.1. On peut utiliser quelques "trucs" mnémotechniques pour retenir ces développements limités :

1. Pour l'exponentielle, les signes n'alternent pas, et on divise toujours par $k!$.
2. Pour $\ln(1+x)$, les signes alternent, mais on ne met pas de factorielles.
3. Le cosinus est une fonction paire. Il n'y a donc que des puissances paires, et on divise par la factorielle correspondante.
4. Même chose pour le sinus, mais puisque le sinus est une fonction impaire, on ne met que des puissances impaires.
5. Pour $(1+x)^a$, les signes n'alternent pas, on divise toujours par des factorielles, et on multiplie toujour le numérateur par le "$a - k$ suivant". Ainsi, pour le terme x^k, il y a un produit de k termes au numérateur.
6. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est un cas particulier de l fonction précédente, avec $a = 1$.
7. $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$ ont un développement limité à tout ordre analogue aux fonctions correspondantes cos et sin, mais les signes n'alternent pas.

4.2.2 Algèbre des développements limités

Voici les règles essentielles.

On considère deux fonctions f et g définies au voisinage de $0 \in \mathbb{R}$, admettant toutes les deux un développement limité d'ordre n à l'origine :

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n), \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n).$$

Alors :

1. La ***somme*** $f+g$ admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est la somme de ceux de f et g.
2. Le ***produit*** fg admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le produit P_nQ_n.
3. Si $f(0) = 0$, alors $g \circ f$ admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le polynôme composé $Q_n \circ P_n$.
4. Si f est n fois dérivable sur I, alors la ***dérivée*** de f admet un développement limité d'ordre $n-1$ en 0, dont le polynôme de Taylor est la dérivée de celui de f :
$$f'(x) = P_n'(x) + o\left(x^{n-1}\right).$$
5. Toute ***primitive*** de f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0, dont le polynôme de Taylor est une primitive de celui de f.
6. Pour calculer le développement limité en 0 à l'ordre n de l'***inverse*** d'une fonction, on se ramène en général à calculer l'inverse d'un développement $1 + R_n(x) + o(x^n)$, où R_n est un polynôme de degré n tel que $R_n(0) = 0$. On applique pour cela le développement limité de $\dfrac{1}{1+u}$ en posant $u = R_n(x) + o(x^n)$. Le développement limité de $\dfrac{1}{1+R_n(x)+o(x^n)}$ est donc $S_n(x) + o(x^n)$, où $S_n(x)$ est obtenu en gardant les termes d'ordre inférieur ou égal à n dans :
$$1 - R_n(x) + R_n^2(x) - R_n^3(x) + \cdots + (-1)^n R_n^n(x).$$

Exemple 4.2.2. On remarque que, dans la liste des dérivées classiques, certains peuvent être retrouvés à partir des autres à l'aide des règles de calcul ci-dessus :

1. Supposons qu'on demande le développement limité de $\cosh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ à l'ordre 3. On peut le trouver à l'aide de la formule de la somme :
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}\right) + o\left(x^3\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + 0 + o\left(x^3\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).$$
2. Si on demande le développement limité de $\sinh(x)$ à l'ordre 2 en $x_0 = 0$, puisque $\cosh' = \sin h$, il suffit de dériver le développement limité de $\cosh(x)$ à l'ordre 3. On a ainsi :
$$\sin h(x) = x + 0 + o\left(x^2\right) = x + o\left(x^2\right).$$
3. Si on connaît le développement limité de $\sin(x)$ en $x_0 = 0$ à l'ordre 5, on déduit celui de $\cos(x)$ à l'ordre 4 :
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right), \text{ donc, en dérivant}$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)$$
4. On trouve le développement limité à l'ordre 4 de $\ln(1+x)$ en $x_0 = 0$ en calculant la primitive du développement limité à l'ordre 3 de $\dfrac{1}{1+x}$, qui s'annule en 0 :
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o\left(x^3\right), \text{ donc, en intégrant :}$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right).$$
5. On se souvient que la dérivée de $x \mapsto \arccos x$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On peut utiliser cette propriété pour calculer le développement limité de $\arccos x$ en 0 à l'ordre 4. Pour cela, on calcule le développement de sa dérivée à

l'ordre 3, et on rappelle que $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. On a :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= -\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-x^2\right)^2\right) + o\left(x^3\right) \\
&= -1 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right) \quad \text{(on n'écrit pas les termes d'ordre} > 3\text{). Donc :} \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

6. On veut calculer le développement limité de $\tan(x)$ en 0 à l'ordre 3. Or $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$. Cet exemple illustre le calcul du développement limité d'un quotient. On calcule le développement limité de $\sin x$ à l'ordre 3 et le développement limité de $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 3, et on applique la règle du développement du produit en ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 3. On a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$. D'autre part $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$. On pose $u = -\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$. Donc :

$$\frac{1}{\cos x} = 1 - u + o\left(x^3\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).$$

On remarque qu'on n'a pas écrit le terme u^2 du développement. En effet, $u^2 = \frac{x^4}{4} + \cdots$, qui est “absorbé” dans $o\left(x^3\right)$. Donc :

$$\tan x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + o\left(x^3\right) = x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + o\left(x^3\right) = x + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right).$$

Les règles de calcul ci-dessus permettent également de déterminer les développements limités de certaines fonctions en un point différent de 0 :

Exemple 4.2.3.

1. On demande le développement limité de cos à l'ordre 3 au point $\frac{\pi}{2}$. On procède par ***changement de variables***, en posant $x = \frac{\pi}{2} + h$. Ainsi, quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, alors h tend vers 0. On a donc :

$$\begin{aligned}
\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right) &= -\sin(h) = -\left(h - \frac{h^3}{3!} + o\left(h^3\right)\right) \\
&= -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right).
\end{aligned}$$

2. On demande le développement limité de l'exponentielle au point 1 à l'ordre 3. On pose $x = 1 + h$. Ainsi, quand x tend vers 1 alors h tend vers 0. On a :

$$\begin{aligned}
\exp(x) = \exp(1+h) = \exp(1) \cdot \exp(h) &= \mathrm{e} \cdot \left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + o\left(h^3\right)\right) \\
&= \mathrm{e} \cdot \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!}\right) + o\left((x-1)^3\right).
\end{aligned}$$

4.3 Tangente et position du graphe d'une courbe par rapport à sa tangente

On a vu plus haut que le développement limité à l'ordre 1 d'une fontion permet de retrouver l'équation de sa tangente en un point. Si on effectue le développement limité jusqu”à l'ordre 2, on obtient une information supplémentaire : la position de la tangente par rapport au graphe de la fonction en ce point.

Proposition 4.3.1. *Si $f\colon I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ admet au point $x_0\in I$ le développement limité $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$, avec $a_n\neq 0$, alors :*

1. *la droite d'équation $y=a_0+a_1(x-x_0)$ est tangente au graphe Γ_f de la fonction f au point d'abscisse x_0.*
2. *De plus :*
   (a) *si n est pair :*
      i. *si $a_n>0$, la courbe Γ_f est localement "au-dessus" de sa tangente ;*
      ii. *si $a_n<0$, la courbe Γ_f est localement "en-dessous" de sa tangente ;*
   (b) *si n est impair, la courbe Γ_f "traverse" sa tangente au point $(x_0,f(x_0))$: on dit que ce point est un **point d'inflexion**.*

Reprenons les deux derniers exemples :

Exemple 4.3.2.

1. Nous connaissons le développement limité de $\cos(x)$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$. Les termes d'ordre inférieur ou égal à 1 montrent que la droite d'équation $y=-x+\frac{\pi}{2}$ est l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction cos au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. Le terme suivant du développement limité est $\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3$. On voit que ce terme est positif si x est supérieur à $\frac{\pi}{2}$ et négatif si x est inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Cela signifie que :
$$f(x)>-x+\frac{\pi}{2}\text{ si }x>\frac{\pi}{2}\text{ et }f(x)<-x+\frac{\pi}{2}\text{ si }x<\frac{\pi}{2}.$$
Ainsi le graphe de cos "traverse" sa tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$, en étant *en dessous* de la tangente à gauche de ce point, et *au-dessus* de la tangente à droite de ce point. Le graphe de la fonction cos présente un *point d'inflexion* en $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ (voir Figure 4.3.1).
2. La même analyse montre que la droite d'équation $y=\mathrm{e}+\mathrm{e}\cdot(x-1)$ est la tangente au graphe de l'exponentielle au point d'abscisse 1. Cette fois, puisque le terme suivant du développement limité est $\mathrm{e}\cdot\dfrac{(x-1)^2}{2}>0$, le graphe de l'exponentielle est situé *au-dessus* de cette tangente (voir Figure 4.3.2).

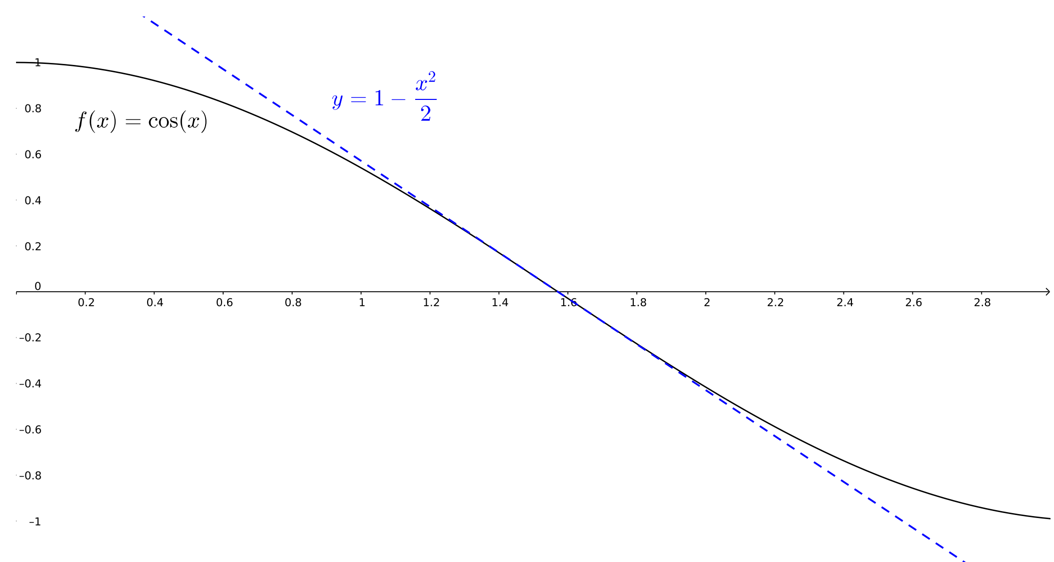


FIGURE 4.3.1 – $\cos(x)$ et sa tangente au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$

Remarque 4.3.3. De façon générale, l'écriture d'un développement limité $f(x)=P_n(x-x_0)+o((x-x_0)^n)$ dit que le graphe Γ_f a un ***contact d'ordre*** n avec la courbe d'équation $y=P_n(x-x_0)$ au point d'abscisse x_0. La position du graphe par rapport à cette courbe peut-être déterminée comme ci-dessus en analysant le terme suivant du développement limité.

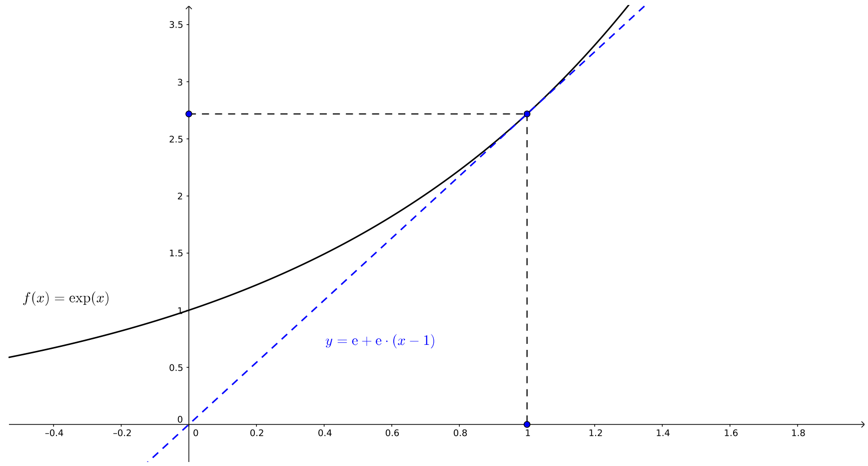


FIGURE 4.3.2 – $\exp(x)$ et sa tangente au point d'abscisse 1

Exemple 4.3.4. La forme arrondie du graphe de la fonction cos au voisinage du point $(0,1)$ est bien connue, et évoque la forme d'une parabole. En effet :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right).$$

Donc le graphe de la fonction cos a un contact d'ordre 2 avec la parabole d'équation $y = 1 - \frac{x^2}{2}$, et est localement situé *au-dessus* de cette parabole (car $\frac{x^4}{4} > 0$) (voir Figure 4.3.3).

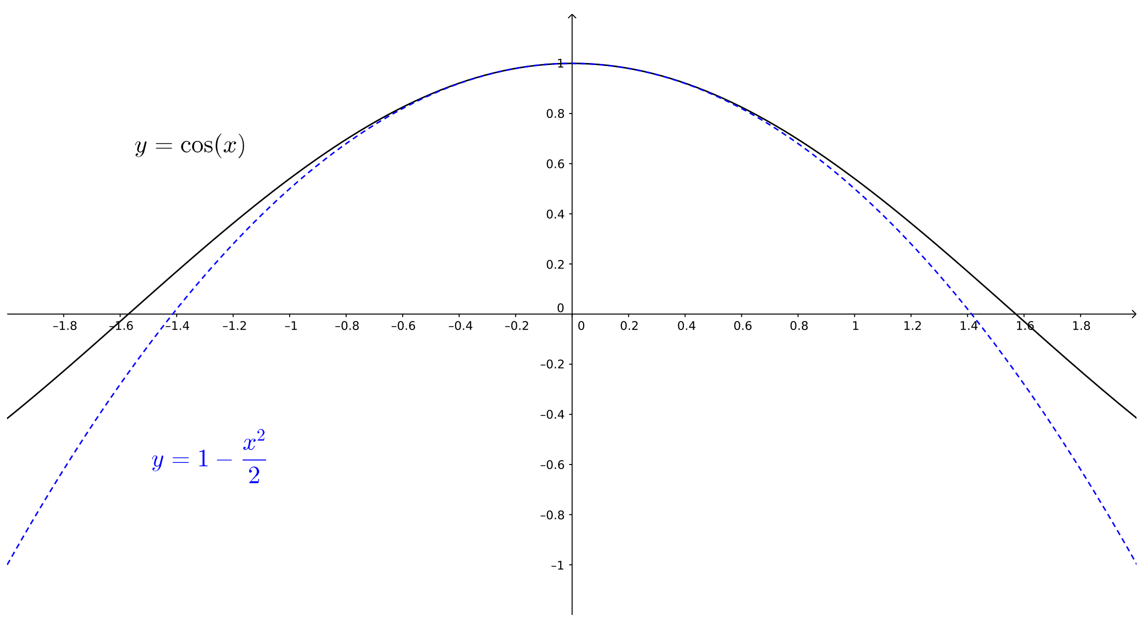


FIGURE 4.3.3 – $\cos(x)$ et $1 - \dfrac{x^2}{2}$

4.4 Développements limités généralisés, développements généralisés à l'infini

Cette section conclut l'analyse des limites en expliquant comment décrire le comportement asympotique d'une fonction. Nous commençons par illustrer ce propos par un exemple.

Exemple 4.4.1. Soit $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x}$. On souhaite étudier le comportement limite de f au voisinage de l'origine. Une analyse facile montre que f est une fonction impaire (c'est le quotient d'une fonction paire par une fonction impaire). On se concentre donc sur l'intervalle $]0,+\infty[$. On voit que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Donc le graphe admet la droite d'équation $x=0$ comme *asymptote verticale*. Pour en savoir d'avantage, on utilise le développement limité de $\cos(x)$ en 0 à l'ordre 2. On a :

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} = \frac{1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{2} + o(x)$$

(on rappelle que $o\left(x^2\right)$ signifie $x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$, donc $\frac{o\left(x^2\right)}{x} = x\varepsilon(x) = o(x)$). Ça n'est plus un développement limité au sens usuel, puiqu'il ne commence pas par un polynôme. C'est tout de même une forme de développement, qui donne de l'information sur le comportement asymptotique de la fonction f au voisinage de 0. En effet, on voit que $f(x)$ est la somme de $\dfrac{1}{x}$ et d'un terme qui tend vers 0 quand $x \to 0^+$. Donc le graphe de f admet l'*hyperbole* d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ comme asymptote. De plus, puisque le terme suivant du développement, $-\frac{x}{2}$, est négatif pour $x>0$, on en déduit que le graphe de f est situé *en-dessous* de l'hyperbole.

Ainsi le graphe Γ_f, quand x tend vers 0^+, est "coincé" entre l'asymptote verticale $\{x=0\}$ et l'hyperbole $\left\{y=\dfrac{1}{x}\right\}$. Nous observons ainsi que le développement ci-dessus, bien que n'étant pas un développement limité au sens strict, donne une information précise sur le comportement asymptotique de f au voisinage de $x_0=0$.

Remarque 4.4.2. De même, pour conclure complètement l'étude des limites de fonctions, il faut pouvoir les étudier quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$. La notion de développement limité doit donc être étendue pour couvrir également ce genre de situation. C'est l'objet de cette section.

Définition 4.4.3. Soit $f : \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

1. On dit que f admet un ***développement limité généralisé en un point*** $x_0 \in \mathbb{R}$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ si :
$$f(x) = \frac{b_p}{(x-x_0)^p} + \frac{b_{p-1}}{(x-x_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{b_1}{x-x_0} + a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$
au voisinage de x_0. On parle aussi de développements limités généralisés à droite et à gauche de x_0.
2. Si $\mathcal{D}_f$ contient un intervalle $]a,+\infty[$, on dit que f admet un ***développement généralisé en*** $+\infty$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ si
$$f(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$
au voisinage de $+\infty$ (c'est à dire pour x assez grand). On a la définition analogue au voisinage de $-\infty$.

Remarque 4.4.4.

1. Pour obtenir un développement limité (généralisé ou non), on pose $x = x_0 + h$, en utilisant les déloppements limités classiques quand h tend vers 0.
2. Pour obtenir un développement limité généralisé au voisinage de l'infini, on pose $X = \dfrac{1}{x}$, et on utilise les développements limités classiques quand X tend vers 0.
3. Dans les deux cas, le resultat final doit être exprimé en la variable x (c'est à dire à l'aide de puissances positives ou négatives de $(x-x_0)$ dans le premier cas, et à l'aide de puissances positives ou négatives de x dans le deuxième cas).

Définition 4.4.5. Si $f\colon \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet en $\pm\infty$ le développement limité généralisé :

$$f(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

on dit que la courbe d'équation $y = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}$ est ***asymptote au graphe de*** f ***à l'ordre*** n en $\pm\infty$. En particulier, si :

$$f(x) = b_1 x + b_0 + o(1),$$

on dit que le graphe de f admet en $\pm$ l'***asymptote oblique*** d'équation $y = b_1 x + a_0$.

Remarque 4.4.6. Comme précédemment, on étudie la position du graphe Γ_f par rapport à l'asymptote en analysant le signe du premier terme suivant non nul dans le développement limité.

Exemple 4.4.7 (Examen de deuxième session Dijon, 2016–2017)**.** Il s'agit de calculer le développement généralisé de $f\colon x \mapsto \dfrac{x^3+x^2+1}{x^2+1}$ en $+\infty$ à l'ordre 1 et d'en déduire le comportement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$. On pose donc $X = \dfrac{1}{x}$ (c'est à dire $x = \dfrac{1}{X}$) et on cherche le développement de la fonction obtenue à l'ordre 1 quand X tend vers 0. On a :

$$f(x) = \frac{1}{X}\frac{1+X+X^3}{1+X^2}.$$

On est donc ramené à chercher le développement limité à l'ordre 2 du quotient $\dfrac{1+X+X^3}{1+X^2}$ quand X tend vers 0 (puisque l'énoncé demande un développement à l'ordre 1, on a besoin d'un développement à l'ordre 2 de ce quotient à cause du produit par $\dfrac{1}{X}$). On remarque que la contribution du terme X^3 est absorbée par le reste $o\left(X^2\right)$, donc on peut écrire tout de suite :

$$\frac{1+X+X^3}{1+X^2} = \frac{1+X}{1+X^2} + o\left(X^2\right) = (1+X)\left(1-X^2\right) + o\left(X^2\right) = 1 + X - X^2 + o\left(X^2\right)$$

(à nouveau le terme $-X^3$ du produit est absorbé dans le reste $o\left(X^2\right)$). Ainsi :

$$f(x) = \frac{1}{X}\left(1 + X - X^2 + o\left(X^2\right)\right) = \frac{1}{X} + 1 - X + o(X) = x + 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Puisque $-\frac{1}{x}$ est négatif quand x tend vers $+\infty$, on déduit que le graphe de f admet en $+\infty$ l'asymptote oblique d'équation $y = x + 1$, et est située sous cette asymptote (voir Figure 4.4.1).

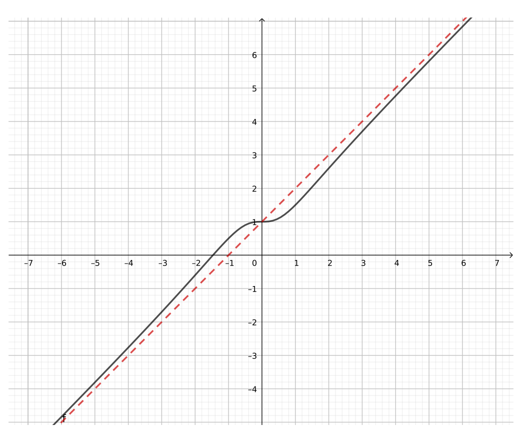


Figure 4.4.1 – $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+1}{x^2+1}$ et son asymptote

Remarque 4.4.8. Les développements limités généralisés à l'infini permettent de déterminer si le comportement de f se rapproche d'une fraction rationnelle. Or, on sait qu'une fraction rationnelle à l'infini est toujours équivalente à un monome de la forme cx^n, $n \in \mathbb{N}$. Ceci explique que les fonctions exponentielle, logarithme, cosinus, sinus, tangente, cosinus et sinus hyperbolique, ou les fonctions puissances $x \mapsto x^a$ avec $a \neq \mathbb{N}$, n'admettent pas de développement limités généralisés à l'infini :soit parce qu'elle croissent trop vite ou trop lentement, ou parce qu'elles sont périodiques, ou parce que leur type de croissance n'est pas mesuré par un monôme cx^n, avec $n \in \mathbb{N}$.

5 Primitives et intégrales

Nous traitons dans cette section le dernier point du Programme Général.

5.1 A quoi sert le calcul intégral ?

Dans le programme de L1, il y a deux applications directes, très utiles en physique, du calcul intégral :

1. Etant donnée une fonction $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il permet de calculer la surface délimitée par le graphe de f, l'axe des abscisses, et les deux droites verticales d'abscisses a et b. Donc, il permet de calculer de calculer la surface de toutes sorte d'objets de dimension 2.
2. Il est utilisé dans la résolution des équations différentielles.

Il s'appuie en grande partie sur le *calcul des primitives*. Disons brièvement qu'une primitive d'une fontion f est une fonction F telle que $F' = f$. Malheureusement, contrairement au calcul des dérivées qui est purement mécanique (on peut toujours, connaissant les dérivées des fonctions classiques et en appliquant strictement les règles sur les opérations usuelles des fonctions dérivables, calculer la dérivée d'une fonction donnée), la recherche des primitives d'une fonction donnée peut donner beaucoup de difficultés. Nous parcourons dans ce chapitre les techniques principales permettant d'y aboutir.

Notation 5.1.1. Dans tout ce chapitre sur primitives et intégrales, on désignera par $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle.

5.2 Primitives d'une fonction

Définition 5.2.1. Soit $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Une ***primitive*** de f sur I est une fonction $F\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Proposition 5.2.2. *Soit $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f admet une primitive sur I.*

Proposition 5.2.3. *Soit $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

1. *Si F est une primitive de f, alors, pour tout nombre $C \in \mathbb{R}$, $F + C$ est également une primitive de f.*
2. *Soit F une primitive de f. Alors toute primitive de f est de la forme $F + C$ pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}$.*

Notation 5.2.4. Une primitive de f est notée $\int f$ ou $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. A cause de la proposition ci-dessus, une primitive est toujours donnée avec une constante additive.

Exemple 5.2.5. On a :

$$\int \exp(x)\,\mathrm{d}x = \exp(x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

5.2.1 Primitives des fonctions usuelles

Comme pour le calcul des dérivées, le calcul des primitives commence par la maîtrise des primitives des fonctions usuelles. Voici les principales :

1. $\displaystyle\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(x) + C$ ($I =]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$).
2. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$. $\displaystyle\int a^x \mathrm{d}x = (\log_a \mathrm{e})\, a^x + C$ pour $a > 0$.
3. $\displaystyle\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$. $\displaystyle\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$.
4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C = -\arccos(x) + C$. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(x) + C$.

5. $\displaystyle\int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + C$. $\displaystyle\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C$. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \tanh(x) + C$.

5.2.2 Techniques essentielles dans le calcul de primitives

La première propriété fondamentale est la linéarité :

Proposition 5.2.6 (linéarité)**.** *Soient f, g deux fonctions réelles et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\int (af(x) + bg(x))\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cette propriété permet donc de ramener la recherche des primitives de la somme de fonctions à la recherche des primitives de chacune des fonctions de la somme.

Exemple 5.2.7.

$$\int (3\mathrm{e}^x - \cos x)\,\mathrm{d}x = 3\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x - \int \cos x \mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^x - \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

L'énoncé suivant donne deux méthodes essentielles qui permettent souvent de ramener la recherche des primitives d'une fonction donnée à l'une des primitives classiques.

Proposition 5.2.8 (changement de variable et intégration par parties)**.**

1. ***Changement de variable.*** *On se donne deux fonctions f et g. On suppose que f admet une primitive F et que g est dérivable. Alors*
$$\int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C.$$
2. ***Intégration par parties.*** *Soient f et g deux fonctions dérivables. Alors :*
$$\int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

La méthode de changement de variable est très efficace. Il faut apprendre à bien s'en servir. Pour cela, il faut toujours regarder si, dans la fonction dont on cherche les primitives, on peut trouver simultanément une fonction g et sa dérivée g'.

Exemple 5.2.9. Il est impossible de calculer les primitives de $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{d}x$. En revanche, il est très facile de calculer $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\cos x}\sin x \mathrm{d}x$. En effet, on reconnaît dans cette intégrale la présence de $g\colon x \mapsto \cos x$ et de sa dérivée $x \mapsto -\sin x$. La façon pratique d'utiliser le point 1. de la proposition ci-dessus est de faire un *changement de variable* en posant $u = \cos x$. On écrit ensuite, en dérivant : $\mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x$. On obtient donc :

$$\int \mathrm{e}^{\cos x}\sin x \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^u(-\mathrm{d}u) = -\int \mathrm{e}^u \mathrm{d}u = -\mathrm{e}^u + C = -\mathrm{e}^{\cos x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

On note que, même si on a procédé à un changement de variables, le résultat doit être donné en termes de la variable initiale.

De même, la méthode d'intégration par parties est très efficace également. Il faut repérer dans l'expression le produit de deux fonctions. Le problème se pose :laquelle sera f et laquelle sera g' ? Il faut faire ce choix de telle sorte que le calcul de la primitive g de g' soit facile, et que l'intégrale à droite du signe "=" dans le point 2. de la proposition ci-dessus soit plus simple que l'intégrale dont on part, à gauche du signe "=".

Exemple 5.2.10. On veut calculer $\displaystyle\int \mathrm{e}^x x^2 \mathrm{d}x$. On a le produit de deux fonctions. On sait facilement calculer les primitives de chacune d'elles. Donc on pourrait appliquer la méthode d'intégration par parties en décidant que $g'(x) = x^2$ ou que $g'(x) = \mathrm{e}^x$.

Si on pose $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g'(x) = x^2$ (et donc $g(x) = \frac{1}{3}x^3$) on obtient :

$$\int \mathrm{e}^x x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^x x^3 - \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^x x^3 \mathrm{d}x.$$

On voit que la deuxième intégrale est plus compliquée à calculer que la première !

On pose donc $f(x) = x^2$ et $g'(x) = e^x$ (et donc $g(x) = e^x$). On obtient :

$$\int e^x x^2 dx = x^2 e^x - 2\int e^x x dx.$$

On calcule cette dernière intégrale à nouveau par parties, en “dérivant x et en intégrant e^x” :

$$\int e^x x^2 = x^2 e^x - 2\left(e^x x - \int e^x dx\right) = x^2 e^x - 2e^x x + 2e^x = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right).$$

Parfois, les deux méthodes peuvent être employées :

Exemple 5.2.11. On veut calculer $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$.

1. On peut poser $u = \ln(x)$. On obtient $du = \frac{dx}{x}$, et donc :

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int u du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2(x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2. On peut intégrer par parties en intégrant $\frac{1}{x} = x^{-1}$ et en dérivant $\ln(x)$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x)}{x} dx &= \ln^2(x) - \int \frac{\ln(x)}{x} dx \text{ et donc :}\\ 2\int \frac{\ln(x)}{x} dx &= \ln^2(x) + C\\ \int \frac{\ln(x)}{x} dx &= \frac{1}{2}\ln^2(x) + C,\ C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemple 5.2.12. On demande $\int \ln(x) dx$. On peut intégrer par parties, en posant $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = 1$. On obtient :

$$\int \ln(x) dx = x\ln(x) - \int \frac{x}{x} dx = x\ln(x) - x + C.$$

Remarque 5.2.13. Un bonne façon de vérifier un calcul de primitives est de dérivée la supposée primitive qu'on vient de trouver, et de s'assurer qu'on retrouve bien la fonction initiale !

5.2.3 Primitives des fractions rationnelles

On commence les primitives de *fractions simples :*

1. ***Pôle simple*** :

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A\ln|x-a| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

   Cela se voit en procédant au changement de variables $t = x - a$, $dt = dx$
2. ***Pôle d'ordre supérieur*** :

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C,\ C \in \mathbb{R},\ n \neq 1.$$

   Là encore, cela se retrouve grâce au changement de variable $t = x - a$, $dt = dx$.
3. ***Dénominateur de degré*** 2 : $f(x) = \dfrac{Ax+B}{ac^2+bx+c}$. Plutôt que de donner des formules générales, impossibles à retenir, nous expliquons la méthode générale sur des exemples.
4. ***Dénominateur de degré*** 2 ***élevé à une puissance entière*** :$f(x) = \dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+C)^n}$, $n \geq 1$.

Exemple 5.2.14. On cherche les primitives de $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$. On constate que le dénominateur à pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$. Il a donc deux racines réelles qui sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. Dans ce cas, on peut écrire

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}.$$

Il y a plusieurs moyens de déterminer a et b :

1. (Méthode des coefficients indéterminés) On écrit l'équation :

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^2-3x+2} &= \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}\\ \frac{x+2}{x^2-3x+2} &= \frac{a\left(x-2\right)+b\left(x-1\right)}{x^2-3x+2}\\ x+2 &= \left(a+b\right)x-2a-b.\end{aligned}$$

   On donc $a+b=1$ et $-2a-b=2$, ce qui donne $a=-3$ et $b=4$. On en déduit :

$$\begin{aligned}f\left(x\right) &= \frac{-3}{x-1}+\frac{4}{x-2} \text{ et donc :}\\ \int f\left(x\right)\mathrm{d}x &= -3\ln\left|x-1\right|+4\ln\left|x-2\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. (Méthode de passage à la limite). On utilise le fait que l'équation doit être satisaite pour tout x. On multiple l'équation

$$\begin{aligned}f\left(x\right)=\frac{x+2}{x-3x+2} &= \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2} \text{ par } x-1, \text{ ce qui donne :}\\ \frac{x+2}{x-2} &= a+\frac{b\left(x-1\right)}{x-2}, \text{ et on pose } x=1\text{, ce qui donne :}\\ \frac{3}{-1} &= a.\end{aligned}$$

   On en déduit $a=-3$. Par la même méthode, en multipliant l'équation initiale par $x-2$ et en posant $x=2$, on trouve $b=4$.

Exemple 5.2.15. On cherche les primitives de $f\left(x\right)=\frac{x-3}{x^2-4x+5}$. Cette fois, le dénominateur a pour discrimant $\Delta=16-20=-4<0$. Le dénominateur n'a pas de racines réelles. On fait donc apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur, qui est $2x-4$, sous la forme :

$$\begin{aligned}x-3 &= A\left(2x-4\right)+B,\ A,B\in\mathbb{R}.\\ &= 2Ax-4A+B.\end{aligned}$$

On trouve $2A=1$ et donc $A=\frac{1}{2}$, et $-4A+B=-3$, et donc $B=-3+2=-1$. On obtient

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{x^2-4x+5}=g\left(x\right)-h\left(x\right).$$

1. On calcule une primitive de $g\left(x\right)$ par le changement de variable $u=x^2-4x+5$, qui donne $\mathrm{d}u=\left(2x-4\right)\mathrm{d}x$:

$$\int\frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+5}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u}=\frac{1}{2}\ln\left|u\right|=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right|=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-4x+5\right).$$

   Le dernière égalité résulte du fait que $x^2-4x+5>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. On n'ajoute pas non plus la constante d'intégration, qu'on ajoutera en fin de calcul.
2. Pour calculer une primitive de $h\left(x\right)$, on écrit le dénominateur comme une somme de deux termes au carré, en utilisant une identité remarquable :

$$x^2-4x+5=\left(x^2-4x+4\right)-4+5=\left(x-2\right)^2+1,$$

   et en procédant au changement de variables $t=x-2$, $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. On obtient :

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+5}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-2\right)^2+1}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\arctan t=\arctan\left(x-2\right).$$

Ainsi :

$$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-4x+5\right)-\arctan\left(x-2\right)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Exemple 5.2.16. On cherche les primitives de $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$. Il y a une méthode générale pour calculer les primitives de $\dfrac{1}{(1+x^2)^k}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Nous l'illustrons ici avec $k = 2$. On pose $x = \tan u$, et donc $\mathrm{d}x = \left(1+\tan^2 u\right)\mathrm{d}u = \left(1+x^2\right)\mathrm{d}u$. D'autre part, on rappelle les relations :

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \text{ et } \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}.$$

Ainsi :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int \frac{\left(1+x^2\right)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+x^2} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+\tan^2 u} = \int \cos^2 u\mathrm{d}u.$$

Première méthode. Pour calculer cette intégrale, on peut *linéariser* en écrivant $\cos^2 u = \dfrac{\cos(2u)+1}{2}$. En effet :

$$\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1.$$

Une autre façon de retrouver cette éaglité est d'écrire $\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}$. Ainsi :

$$\cos^2 u = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}u}+2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}u}}{4} = \frac{2\cos(2u)+2}{4} = \frac{\cos(2u)+1}{2}.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int \cos^2 u\mathrm{d}u &= \frac{1}{4}\sin(2u) + \frac{u}{2} + C = \frac{1}{2}\sin(u)\cos(u) + \frac{u}{2} + C \\
&= \frac{1}{2}\sin(\arctan x)\cos(\arctan x) + \frac{1}{2}\arctan x + C. \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\tan^2(\arctan x)}}{1+\tan^2(\arctan x)} + \frac{1}{2}\arctan x + C \\
&= \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan x + C.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode. On peut également intégrer par parties :

$$\begin{aligned}
&\int \cos^2 u\mathrm{d}u = \int \cos u \sin' u\mathrm{d}u \text{ et, en intégrant par parties :} \\
&\int \cos^2 u\mathrm{d}u = \sin u\cos u + \int \sin^2 u\mathrm{d}u = \tan u\cos^2 u + \int \left(1-\cos^2 u\right)\mathrm{d}u \\
&2\int \cos^2 u\mathrm{d}u = \frac{\tan u}{1+\tan^2 u} + u \text{ et donc :} \\
&\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan x + C,\ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Troisième méthode. On peut également procéder autrement, *sans faire le changement de variables* $x = \tan u$. On écrit pour cela :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \\
&= \arctan x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Il s'agit donc maintenant de calculer $I = \int \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$. On fait une intégration par parties, en posant :

$$h(x) = x \text{ et } g'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

Il est facile de trouver une primitive de $g'(x)$: on pose $t = 1 + x^2$, et donc $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$, et on a :

$$g(x) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{2}t^{-1} = -\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-1}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x &= h(x)\,g(x) - \int h'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan(x) + C\end{aligned}$$

Donc :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)} = \arctan(x) - \left(-\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan(x)\right) + C = \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + C.$$

Remarque 5.2.17.

1. La troisième méthode exposée ci-dessus permet de calculer les primitives de la forme $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^n}$, pour tout n entier supérieur ou égal à 2.
2. De façon générale, on tente toujours, pour calculer les primitives d'une fraction rationnelle, de l'écrire comme une somme de termes de l'un des quatre types ci-dessus.

Exercice 5.2.18. Calculer $\int \cos^3 t dt$:

1. En linéarisant, à l'aide de la formule :
$$\cos^3 t = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\right)^3.$$
2. En intégrant par parties, après avoir écrit $\cos^3 t = \cos^2 t \sin' t$.

5.2.4 Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

Les situations suivantes se ramènent, par changements de variables convenables, à la recherche des primitives d'une fraction rationnelles.

1. Si $f(x) = F(\cos x, \sin x)$ est une fraction rationnelle en les variables $\cos x$ et $\sin x$ (c'est à dire est obtenue à partir de $\cos x$ et $\sin x$ à l'aide des quatre opérations : somme, différence, produit, quotient), alors :
   (a) si $f(-x) = -f(x)$, on pose $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$.
   (b) si $f(\pi - x) = -f(x)$, on pose $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x$.
   (c) si $f(\pi + x) = f(x)$, on pose $t = \tan x$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x = \left(1+t^2\right)\mathrm{d}x$.
   (d) Si on ne voit aucune de ces symétries, on peut poser $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, et donc
   $$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2},\ \tan x = \frac{2u}{1-u^2},\ \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$
2. Si $f(x) = F(\mathrm{e}^x, \cosh x, \sinh x, \tanh x)$ où F est une fraction rationnelle, on pose $t = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ (et donc $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}$) pour se ramener en une fraction rationnelle en t.
3. Si $f(x) = F\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$, on pose $u = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.
4. Si $f(x) = F\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, on transforme la racine carrée en l'une des formes :
   (a) $\sqrt{t^2+1}$: on pose $t = \sinh u$ et donc $\mathrm{d}t = \cosh u$ et $\sqrt{t^2+1} = \cosh u$.
   (b) $\sqrt{t^2-1}$: on pose $t = \pm\cosh u$ $(u > 0)$, $\mathrm{d}t = \pm\sinh u$ et $\sqrt{t^2-1} = \sinh u$.
   (c) $\sqrt{1-t^2}$: on pose $t = \sin u$, $\mathrm{d}t = \cos u$ et $1 - t^2 = \cos^2 u$.

Exemple 5.2.19.

1. On demande les primitives de $f\colon x \mapsto \cos^3 x$ (Examen Dijon, 2016–2017). On a $f(\pi - x) = -f(x)$. Donc on pose $t = \sin x$ et $\mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x$.
$$\int \cos^3 x \mathrm{d}x = \int \cos^2 x \cos x \mathrm{d}x = \int \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x \mathrm{d}x = \int \left(1 - t^2\right) \mathrm{d}t = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$
2. Il n'est pas toujours pertinent de transformer une primitive de fonction trigonométrique en une intégrale de fraction rationnelle à l'aide de l'une des règles ci–dessus. Par exemple, si l'on veut calculer les primitives de $f\colon x \mapsto \cos^2 x$. On voit que $f(\pi + x) = f(x)$, ce qui d'après la règle c) ci-dessus, suggère le changement de variables $t = \tan x$. On a donc :
$$\int \cos^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1 + \tan^2 x} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(1 + t^2\right)^2},$$
dont nous avons vu dans l'Exemple 5.2.16 que le calcul n'est pas si commode !
En revanche, en linéarisant, on trouve $\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(\cos(2x) + 1\right)$, dont les primitives sont $\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

5.3 Intégrales et surfaces

Définition 5.3.1. $f\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. L'***intégrale*** de f sur l'intervalle $[a, b]$ est l'aire du domaine du plan situé entre le graphe de f et l'axe des abscisses, comptée positivement pour la partie située au-dessus de l'axe des abscisses et négativement pour la partie située en-dessous de l'axe des abscisses (voir Figure 5.3.1). Ce nombre est noté :
$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Remarque 5.3.2. Puisque l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ peut être un nombre positif ou négatif, on parle de *l'aire algébrique* sous le graphe de f sur l'intervalle $[a, b]$.

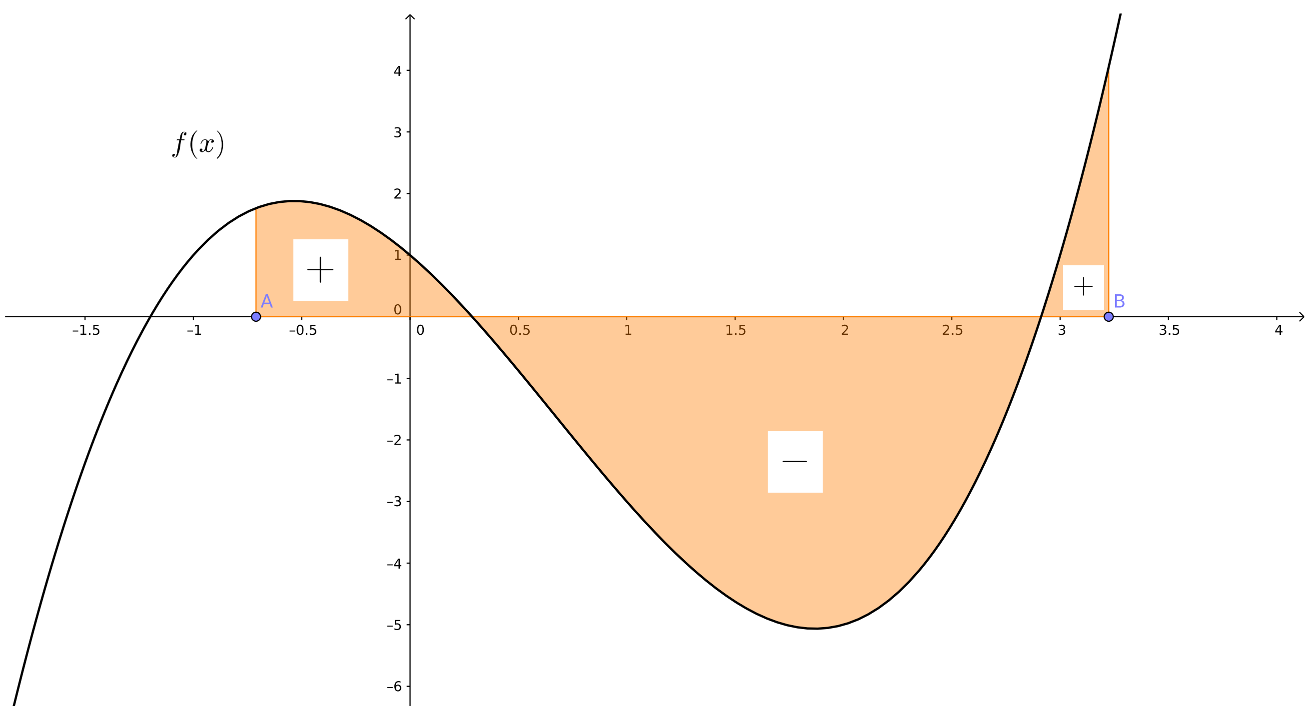


FIGURE 5.3.1 – Intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$

L'intégrale d'une fonction continue vérifie quelques propriétés simples résumées dans l'énoncé suivant :

Proposition 5.3.3. *Soient $f, g\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et soit $c \in \,]a,b[$. Alors :*

1. *On a la relation de* linéarité *:*
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. *Si $f \leq g$ (c'est à dire si $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a,b]$), on a :*
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. *On a la* ***relation de Chasles*** *:*
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le résultat suivant est fondamental. Il permet de relier la notion d'aire algébrique sous le graphe d'une fonction continue et le calcul des primitives :

Théorème 5.3.4 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soit $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit F une primitive de f. Alors :*

1. *La fonction $g\colon x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $]a,b[$ et $g'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \,]a,b[$.*
2. *On a :*
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Remarque 5.3.5. Soit $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Ainsi, si on demande l'aire algébrique sous le graphe de f sur un intervalle, la première des choses à faire est de calculer une primitive de f.
2. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f : c'est l'unique primitive de f qui s'annule au point a. C'est le point remarquable du théorème : *la fonction d'aire sous le graphe de f est une primitive de la fonction f.*

On sait s'intéresse maintenant à la notion de *moyenne*. On sait que si $x_1, \ldots, x_N$ est une famille finie de nombres, alors la moyenne de ces nombres est la quantité :
$$M = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i.$$

Le calcul intégral permet de généraliser cette notion aux valeurs prises par une fonction réelle :

Définition 5.3.6. Soit $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la ***moyenne*** de f sur l'intervalle $[a,b]$ est le nombre :
$$M_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il y a une différence importante entre les familles finies de nombres et les fonctions continues. Il se peut tout à fait qu'aucune des valeurs $x_1, \ldots, x_N$ ne soit égale à la moyenne des nombres $x_1, \ldots, x_N$. Par exemple, si dans une classe de 30 élèves, 15 élèves ont une note de 0 à un épreuve alors que les 15 autres élèves ont une note de 20, la moyenne de la classe est évidemment 10. Et aucun élève n'a obtenu la note de 10.

En revanche, comme l'affirme le résultat suivant, si on considère une fonction continue, il y a au moins un point en lequel la valeur de cette fonction est égale à sa moyenne :

Théorème 5.3.7 (de la moyenne)**.** *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe un nombre $c \in \,]a,b[$ tel que :*
$$f(c) = M_f \quad \left(= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Remarque 5.3.8 (Interprétation géométrique du Théorème de la moyenne)*.* En écrivant l'égalité de la moyenne sous la forme

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)(b-a),$$

on voit qu'elle signifie que l'intégrale de f sur l'intervalle $[a,b]$ est égale à la surface du rectangle de hauteur $f(c)$ et de base $b-a$.

Exercice 5.3.9 (Application du Théorème de la moyenne)**.** On considère la fonction $f\colon t\in\,]0,+\infty[\,\mapsto \log^6(t)$.

1. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0,1[$
2. En déduire :

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^{3x} \ln^6(t)\,\mathrm{d}t.$$

Réponse :

1. La dérivée de f sur $]0,+\infty[$ est $f'(t) = 6\dfrac{\ln^5(t)}{t}$. Puisque $f'(t) < 0$ pour tout $t\in\,]0,1[$, la fonction f est strictement décroissante sur $]0,1[$.

2. Puisque la fonction f est continue, on peut lui appliquer le Théorème de la moyenne. Pour tout $x\in\,]0,1[$, il existe $c_x\in\,]x,3x[$ tel que $f(c_x)(3x-x) = \int_x^{3x}\ln^2(t)\,\mathrm{d}t$. En raison de la décroissance de f, on a $f(3x) < f(c_x) < f(x)$. En multipliant ces inégalités par le nombre *strictement positif* $2x$, on a :

$$2xf(3x) < \int_x^{3x}\ln^6(t)\,\mathrm{d}t < 2xf(x),$$

et donc :

$$2x\ln^6(3x) < \int_x^{3x}\ln^6(t)\,\mathrm{d}t < 2x\ln^6(x).$$

Puisque les deux quantités à gauche et à droite de l'inégalité tendent vers 0 quand x tend vers 0^+, on déduit du "principe des gendarmes" que $\int_x^{3x}\ln^2(t)\,\mathrm{d}t \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Remarque 5.3.10. Dans l'exercice précédent, on note que la limite de l'intégrale a pu être déterminée *sans qu'il soit nécessaire de calculer l'intégrale*. C'est l'intérêt d'appliquer le Théorème de la moyenne. Cela étant, il aurait été possible, au prix d'un long calcul, de déterminer la valeur exacte de l'intégrale et de répondre ainsi à la question. Nous laissons cette autre approche en exercice !