Université de Bourgogne — Novembre 2017
L1 - Math1A

MATH1A - PARTIEL (1h30)

Les trois problèmes sont indépendants, vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.

I (*9 pts*)

On considère la fonction $f\colon \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x\tan(x)$.

1. ***(2 pts)*** Rappeler la définition de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ et donner son domaine de définition.
2. ***(1 pts)*** Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \tan(x)$.
3. ***(1 pt)*** Etudier la parité de la fonction f.
4. ***(3 pts)*** Etudier les variations de f.
5. ***(2 pt)*** On note g la restrition de f à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que g est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$.

II (*4 pts*)

Quelle valeur faut-il donner à $f(0)$ pour que la fonction

$$f\colon x \longmapsto \frac{(\cos(3x)-1)\sin(2x)}{x^2(3^x-1)}$$

soit prolongeable par continuité en 0 ?

III (*7 pts*)

On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2}$.

1. ***(1 pt)*** Montrer que le graphe de f est symétrique par rapport au point $(0,1)$.
2. ***(2 pts)*** Pour $y\in\mathbb{R}$, déterminer, sans les calculer, le nombre d'antécédents de y par la fonction f.
3. ***(2 pt)*** En déduire l'ensemble image $f(\mathbb{R}) = \{f(x) : x\in\mathbb{R}\}$.
4. ***(2 pt)*** La fonction $f\colon \mathbb{R}\to f(\mathbb{R})$ est-elle bijective ?