Université de Bourgogne Janvier 2018
L1 - Math1A

MATH1A - CORRIGÉ BREF DE L'EXAMEN (2h)

Les trois problèmes sont indépendants, vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.

I (*8 pts*)

On considère la fonction $f : x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{x^2+4}$.

1. ***(1 pt)*** Donner le domaine de définition de f. $D_f = \mathbb{R}^*$.
2. ***(1 pt)*** Etudier la parité de f. f est paire.
3. ***(1 pt)*** Calculer la dérivée de f. $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)(x^2+2)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}{x^3\sqrt{x^2+4}}$
4. ***(2 pts)*** Etudier les variations de f (on pourra réduire le domaine d'étude en utilisant les symétries éventuelles du graphe Γ_f de f). Sur $\mathbb{R}_+^*$, f décroît de $-\infty$ jusqu'à $f(2) = \exp(1/4)\,2\sqrt{2}$, puis croît jusqu'à $+\infty$.
5. ***(2 pts)*** Calculer le développement généralisé de $f(x)$ en $+\infty$ à l'ordre 1. $f(x) = x + \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$
6. ***(1 pt)*** En déduire l'équation d'une droite asymptote à Γ_f au voisinage de $+\infty$, et la position de Γ_f par rapport à cette asymptote. $y = x$, Γ_f au-dessus de l'asymptote.

II (*8 pts*)

On considère la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{x+3}{x^2+2x+2}$.

1. ***(3 pts)*** Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 . $f(x) = \frac{3}{2} - x + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$.
2. ***(1 pt)*** En déduire l'équation de la tangente au graphe de f à l'origine, et la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de ce point. $y = -x + \frac{3}{2}$, Γ_f au-dessus de la tangente.
3. ***(3 pts)*** Calculer les primitives de f. $\dfrac{\ln(x^2+2x+2)}{2} + 2\arctan(x+1) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
4. ***(1 pt)*** En déduire la surface $S = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. $S = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) + 2\arctan(2) - \frac{\pi}{2}$.

III (*5 pts*)

1. ***(2 pts)*** Calculer les primitives de $x \mapsto \cos^2(x)$ (on pourra linéariser l'expression, ou exprimer $\cos(x)$ à l'aide d'une exponentielle complexe). $\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}(2x + \sin(2x)) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
2. ***(3 pts)*** En déduire les primitives de $x \mapsto x\cos^2(x)$ (on pourra procéder par une intégration par parties). $\int x\cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{8}(2x^2 + \cos(2x) + 2x\sin(2x)) + C$, $C \in \mathbb{R}$.