Université de Bourgogne — Novembre 2016
L1 - Math11

PARTIEL

I (*7 pts*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 3 - \dfrac{4}{2+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **(*2 pts*)** Montrer que $u_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. **(*3 pts*)** Montrer que (u_n) est une suite monotone.
3. **(*2 pts*)** Montrer que (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

II (*7 pts*)

On considère la fonction $f\colon x \mapsto (x\cos(5x))^3$.

1. **(*1 pt*)** Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. **(*2 pts*)** Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer f'.
3. **(*2 pts*)** Calculer $f\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En déduire que la fonction f est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
4. **(*2 pts*)** La fonction f est-elle injective sur $\mathbb{R}$?

III (*3 pts*)

Quelle valeur faut-il donner à $f(0)$ pour que la fonction

$$f\colon x \longmapsto \frac{3^x - \mathrm{e}^{4x}}{\tan(2x)}$$

soit prolongeable par continuité en 0 ?

IV (*3 pts*)

On considère les polynômes $A(X) = X^3 - X + 1$ et $B(X) = X^2 + 1$. Effectuer la division selon les puissances croissantes à l'ordre 3 de $A(X)$ par $B(X)$.