Université de Bourgogne — Novembre 2016

L1 - Math11

CORRIGÉ DU PARTIEL

I

1. On raisonne par récurrence.

- *Initialisation.* Puisque $u_0 = 4$, il est clair que $u_0 > 2$.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$, pour lequel on suppose que $u_n > 2$. On a

$$u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2+u_n} > 3 - \frac{4}{2+2} = 2.$$

On a bien montré que $u_n > 2$ implique $u_{n+1} > 2$.

2. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3 - \frac{4}{2+u_n} - u_n = \frac{6 + 3u_n - 4 - 2u_n - u_n^2}{2+u_n} \\ &= \frac{2 + u_n - u_n^2}{2+u_n} = \frac{-\left(u_n^2 - u_n - 2\right)}{2+u_n} = \frac{-\left(u_n+1\right)\left(u_n-2\right)}{u_n+2}. \end{aligned}$$

Puisque $u_n < 2$, cette quantité est strictement négative pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que la suite u_n est strictement décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, donc elle converge vers une limite $\ell \geq 2$. Ce nombre ℓ est solution de $\ell = 3 - \frac{4}{2+\ell}$, donc $\ell^2 - \ell - 2 = 0$. Cette équation admet comme solution les nombres -1 et 2, donc $\ell = 2$ (puisque on sait que $\ell \geq 2$).

II

On considère la fonction $f\colon x \mapsto (x\cos(5x))^3$.

1. La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$, de même que la fonction $x \mapsto x^3$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. La fonction f est une composée de fonctions dérivables dont est dérivable. Sa dérivée est :

$$f'(x) = 3x^2\cos^3(5x)\left(\cos(5x) - 5x\sin(5x)\right).$$

3. On a $f\left(\frac{k\pi}{5}\right) = \left(\frac{k\pi}{5}\right)^3\cos^3(k\pi) = \left(\frac{k\pi}{5}\right)^3\left(\left(-1\right)^k\right)^3 = \left(\frac{k\pi}{5}\right)^3(-1)^{3k} = \left(\frac{k\pi}{5}\right)^3(-1)^k$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y \in \left[-\left(\frac{k\pi}{5}\right)^3, \left(\frac{k\pi}{5}\right)^3\right]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. On en déduit que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est surjective.

4. On observe que $f(x) = 0$ si $5x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ou encore $x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. La valeur 0 est donc atteinte une infinité de fois, ce qui implique f n'est pas injective.

III

Il s'agit de chercher la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0. On a:

$$f(x) = \frac{3^x - 1 + \left(1 - \mathrm{e}^{4x}\right)}{\tan(2x)} = \frac{3^x - 1}{\tan(2x)} + \frac{\left(1 - \mathrm{e}^{4x}\right)}{\tan(2x)}.$$

Or $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\tan(2x) \underset{0}{\sim} 2x$. De même $1 - \mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} -x$ donc $1 - \mathrm{e}^{4x} \underset{0}{\sim} 4x$. Enfin, $3^x - 1 = \mathrm{e}^{x\ln 3} - 1 \underset{0}{\sim} x\ln 3$. Donc

$$\frac{3^x - 1}{\tan(2x)} \underset{0}{\sim} \frac{x\ln 3}{2x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{\ln 3}{2} \text{ et } \frac{1 - \mathrm{e}^{4x}}{\tan(2x)} \underset{0}{\sim} \frac{-4x}{2x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -2.$$

Il faut donc poser $f(0) = \frac{\ln 3}{2} - 2$ pour pouvoir prolonger f par continuité en 0.

IV

On considère les polynômes $A(X) = X^3 - X + 1$ et $B(X) = X^2 + 1$. Le quotient est $Q(X) = 1 - X - X^2 + 2X^3$. On a donc

$$A = B \times \left(1 - X - X^2 + 2X^3\right) + X^4 - 2X^5.$$