L1 - MATH1A - FORMULAIRE

Table des matières

1 Limites et continuité

Proposition (encadrement)**.** *On considère trois fonctions f, g, h définies sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$ telles que $f \leq g \leq h$ sur I.*

1. *Si f et h ont la même limite ℓ (finie ou infinie) au point $c \in \mathbb{R}$, alors $g(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers c.*
2. *Si $I =]a, +\infty[$ et si f et h ont la même limite ℓ (finie ou infinie) quand x tend vers $+\infty$, alors $g(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$.*
3. *Si $I =]-\infty, a[$ et si f et h ont la même limite ℓ (finie ou infinie) quand x tend vers $-\infty$, alors $g(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$.*

Opérations sur les limites de fonctions. Soient f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \ell_2$. ($c \in \mathbb{R}$ ou $c = \pm\infty$). Alors

1. Somme de deux fonctions :
   (a) Si $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to c} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$
   (b) Si $\ell_1 = \ell_2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to c} (f(x) + g(x)) = +\infty$.
   (c) Si $\ell_1 = \ell_2 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to c} (f(x) + g(x)) = -\infty$.
   (d) Si $\ell_1 = +\infty$ et $\ell_2 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to c} (f(x) + g(x))$ est indéterminée.
2. Produit de deux fonctions :
   (a) Si $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) g(x) = \ell_1 \ell_2$.
   (b) Si $\ell_1 = \pm\infty$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim\limits_{x\to c} f(x) g(x) = \pm\infty$ (suivant la règle des signes).
   (c) Si $\ell_1 = \pm\infty$ et $\ell_2 = 0$, alors $\lim\limits_{x\to c} f(x) g(x)$ est indéterminée.
3. On déduit les règles sur le quotient de deux fonctions des règles précédentes. En particulier :
   (a) Si $\ell_1 = 0$ et $\ell_2 = 0$, alors $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est indéterminée.
   (b) Si $\ell_1 = \pm\infty$ et $\ell_2 = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est indéterminée.

Fonctions équivalentes.

Définition. Deux fonctions f et g sont équivalentes en un point $c \in \mathbb{R}$ si $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ au voisinage de c et $\lim_{x \to c} \varepsilon(x) = 0$.

Si g ne s'annule pas au voisinage de c, cela revient à $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note $f \underset{c}{\sim} g$ (ou simplement $f \sim g$ si c est sous-entendu).

Proposition. *On ne change pas la limite d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions en un point si on remplace l'une de ces fonctions par une fonction équivalente.*

1. $f \sim f_1$ *et* $g \sim g_1 \Rightarrow fg \sim f_1 g_1$.
2. $f \sim f_1 \Rightarrow \frac{1}{f} \sim \frac{1}{f_1}$ *(si* f *et* f_1*) ne s'annulent pas au voisinage de* c.
3. $f \sim f_1 \Rightarrow f^n \sim f_1^n$, $n \in \mathbb{N}$.
4. $f \sim f_1 \Rightarrow f^a \sim f_1^a$, $a \in \mathbb{R}$, *si* f *et* f_1 *sont strictement positives au voisinage de* c.

Remarque. Attention : $f \sim f_1$ et $g \sim g_1 \not\Rightarrow f + g \sim f_1 + g_1$. De même, $f \sim f_1 \not\Rightarrow \mathrm{e}^f \sim \mathrm{e}^{f_1}$.

Enfin, $f \sim f_1 \not\Rightarrow \ln f \sim \ln f_1$.

Limites fondamentales. Soient deux polynômes $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ et $Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_q x^q$. Alors :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < q \\ \frac{a_p}{b_q} & \text{si } p = q \\ \pm\infty & \text{si } p > q \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0^\pm} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0}{b_0}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \qquad \lim_{x \to 0^\pm} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0^\pm} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a \qquad \lim_{x \to 0^\pm} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a \qquad (a \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} x\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = 1 \qquad \lim_{x \to 0^\pm} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} x\left(a^{1/x} - 1\right) = \ln a \qquad \lim_{x \to 0^\pm} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad (a > 0)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} x\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^a - 1\right) = a \qquad \lim_{x \to 0^\pm} \frac{(1 + x)^a - 1}{x} = a \qquad (a \in \mathbb{R})$$

Proposition (Fonctions composées)**.** *Soient deux fonctions* f *et* g *et* $c \in \mathbb{R}$ *tels que* f *soit continue au point* c *et* g *soit continue au point* $f(c)$*. Alors la fonction composée* $g \circ f$ *est continue au point* c.

Théorème (Valeurs intermédiaires)**.** *Soient* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalle et* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Soient* $a, b \in I$ *tels que* $f(a) \leq f(b)$*. Alors, pour tout* $y \in [f(a), f(b)]$*, il existe* $x \in [a, b]$ *tel que* $f(x) = y$.

Autrement dit : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Corollaire. *Soit* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $f(a) f(b) < 0$*. Alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f(c) = 0$.

Théorème (de la bijection)**.** *Soit* f *une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle* $I \subseteq \mathbb{R}$*. Alors :*

1. f *induit une bijection de* I *sur* $f(I)$.
2. *De plus sa bijection réciproque* f^{-1} *est continue, monotone, et de même sens de variation que* f.

Equivalents usuels.

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x, \quad 1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}, \quad \mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x, \quad \ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x, \quad (1 + x)^a - 1 \underset{0}{\sim} ax \ (\text{pour } a \in \mathbb{R}^*)$$

$$P(x), Q(x) \text{ fonctions polynômes} \Longrightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} \underset{\pm\infty}{\sim} \text{quotient des termes de plus haut degré}$$

2 Dérivées

Proposition. *Soient f et g deux fonctions dérivables d'une variable réelle, de domaines de définition respectif $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

1. *Les fonctions $f+g$, λf et fg sont dérivables, et on a :*
$$(f+g)' = f' + g', \quad (\lambda f)' = \lambda f', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$
2. *Si $f(\mathcal{D}_f) \subseteq \mathcal{D}_g$, alors $g \circ f$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et*
$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$
3. *Si $\mathcal{D}_f = I$ (où I est un intervalle) et si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est bijective sur I, alors, pour tout $x \in I$, l'application réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x)$ et on a :*
$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$
Ce qu'on écrit également, en posant $y = f(x) \in f(I)$:
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Dérivées fondamentales et composition.

$$\begin{array}{ccc}
(x^n)' = nx^{n-1} & (f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)\, f'(x) & \text{pour } n \neq -1 \\
(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x & \left(\mathrm{e}^{f(x)}\right)' = f'(x)\, \mathrm{e}^{f(x)} & \\
(a^x)' = a^x \ln(a) & \left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)} \ln(a)\, f'(x) & \text{pour } a > 0 \\
(\ln x)' = \frac{1}{x} & (\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} & \\
\sin'(x) = \cos x & (\sin f(x))' = f'(x) \cos(f(x)) & \\
\cos' x = -\sin x & (\cos f(x))' = -f'(x) \sin(f(x)) & \\
\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x & (\tan f(x))' = f'(x)\left(1 + \tan^2(f(x))\right) & \\
\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arcsin(f(x)))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} & \\
\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos(f(x)))' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} & \\
\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} & (\arctan(f(x)))' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} & \\
\sinh'(x) = \cosh(x) & (\sinh(f(x)))' = f'(x) \cosh(f(x)) & \\
\cosh'(x) = \sinh(x) & (\cosh(f(x)))' = f'(x) \sinh(f(x)) &
\end{array}$$

Proposition (Dérivée et sens de variation)**.** *Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et f une fonction dérivable sur I. Alors :*

1. *Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, f est croissante sur I.*
2. *Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, f est décroissante sur I.*
3. *Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, f est constante sur I.*
4. *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, f est strictement croissante sur I.*
5. *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, f est strictement décroissante sur I.*
6. *Si $f(c) = 0$ pour un point $x_0 \in I$, alors c est un maximum local, ou un minimum local, ou un point d'inflexion de f.*
   (a) *Si $f''(c) < 0$, la fonction f admet un maximum local au point c.*
   (b) *Si $f''(c) > 0$, la fonctionf admet un minimu local au point c.*
   (c) *Si $f''(c) = 0$, une étude plus poussée est nécessaire.*

3 Fonctions classiques

3.1 Fonctions puissances $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto f(x) = x^r = \mathrm{e}^{r \ln x}$, $r \in \mathbb{R}$.

1. **Dérivées.** $f'(x) = rx^{r-1}$.
2. **Monotonie.** Pour $r > 0$, $f(x)$ est croissante de 0 à $+\infty$. Pour $r < 0$, $f(x)$ est décroissante de $+\infty$ à 0.
3. **Limites.**
   (a) $b > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^b} = 0\,;\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^b \ln(x) = 0$.
   (b) $a > 1$ et $b \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^b} = +\infty$.
   (c) $a < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{a^x} = 0$.

3.2 Homographies $x \in \mathbb{R} \setminus \{-d\} \mapsto \frac{ax+b}{x+d}$

1. **Limites.**
   (a) Si $b - ad > 0$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{ax+b}{x+d} = a$, $\lim\limits_{x\to d^-} \dfrac{ax+b}{x+d} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to d^+} \dfrac{ax+b}{x+d} = +\infty$.
   (b) Si $b - ad < 0$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{ax+b}{x+d} = a$, $\lim\limits_{x\to d^-} \dfrac{ax+b}{x+d} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to d^+} \dfrac{ax+b}{x+d} = -\infty.\longmapsto$
2. **Dérivées.** $\left(\dfrac{ax+b}{x+d}\right)^{(n)} = (b-ad)\,\dfrac{(-1)^n\, n!}{(x+d)^{n+1}}$.

3.3 Fonction logarithme népérien $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(x)$

1. **Définition.** $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.
2. **Propriétés algébriques.** $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall r \in \mathbb{Q}$: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln(a^r) = r\ln(a)$, $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$.
3. **Limites.** $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
4. **Monotonie et dérivées.** ln est strictement croissante. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} x^{-n}$. $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

3.4 Fonction exponentielle $x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^x > 0$

1. **Définition.** exp est la réciproque de la fonction ln.
2. **Propriétés algébriques.** $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall r \in \mathbb{Q}$: $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$, $\mathrm{e}^{ra} = (\mathrm{e}^a)^r$, $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$, $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.
3. **Limites.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
4. **Monotonie et dérivées.** exp est strictement croissante. $\exp^{(n)} = \exp$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq \mathrm{e}^x$.

3.5 Fonction partie entière $x \in \mathbb{R} \longmapsto E(x) \in \mathbb{Z}$

1. **Définition.** $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
2. **Monotonie et dérivées.** La fonction E est croissante et non continue.

3.6 Fonctions trigonométriques.

cos est 2π-périodique est paire, sin est 2π-périodique et impaire. La fonction $\tan\colon x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\right\}$, et impaire.

$$\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0.$$

$$\begin{array}{ccc}
\cos(\pi - x) = -\cos x & \sin(\pi - x) = \sin x & \tan(\pi - x) = -\tan x \\
\cos(\pi + x) = -\cos x & \sin(\pi + x) = -\sin x & \tan(\pi + x) = \tan x \\
\cos(\pi/2 - x) = \sin x & \sin(\pi/2 - x) = \cos x & \tan(\pi/2 - x) = 1/\tan x \\
\cos(\pi/2 + x) = -\sin x & \sin(\pi/2 + x) = \cos x & \tan(\pi/2 + x) = -1/\tan(x)
\end{array}$$

Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$
$$\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad \cos(a)-\cos(b) = -2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin = \left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \sin(a)-\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \qquad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

Linéarisation.

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}, \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}, \quad \sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$$

Formules avec l'angle moitié. Si $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$, alors $\cos(a) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(a) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\tan(a) = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Fonctions circulaires réciproques

1. $y = \arcsin x$, $-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x = \sin(y)$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. arcsin est impaire et $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $y = \arccos x$, $-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x = \cos(y)$, $0 \leq y \leq \pi$. $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. $y = \arctan x$, $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \tan y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. arctan est impaire et $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
4. $x \in [-1,1] \Rightarrow \arcsin(x)+\arccos(x) = \frac{\pi}{2}$. $x > 0 \Rightarrow \arctan(x)+\arctan(1/x) = \pi/2$. $x < 0 \Rightarrow \arctan(x)+\arctan(1/x) = -\pi/2$.

Simplifications avec les fonctions circulaires réciproques

1. $\sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$.
2. $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $\sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

3.7 Fonctions hyperboliques

1. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. cosh est paire, sinh et tanh sont impaires.
2. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$; $\cosh x + \sinh x = e^x$; $1 - \tanh^2(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$.
3. $\sinh'(x) = \cosh(x)$, $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\tanh'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$.

Formules d'addition

$$\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b) \qquad \cosh(a-b) = \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b)$$
$$\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \sinh(b)\cosh(a) \qquad \sinh(a-b) = \sinh(a)\cosh(b) - \sinh(b)\cosh(a)$$
$$\tanh(a+b) = \tfrac{\tanh(a)+\tanh(b)}{1+\tanh(a)\tanh(b)} \qquad \tanh(a-b) = \tfrac{\tanh(a)-\tanh(b)}{1-\tanh(a)\tanh(b)}$$

4 Développements limités

Développements limités usuels.

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} x^k + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\ln(1-x) &= -\sum_{k=1}^{n} x^k + o(x^n) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - x^n + o(x^n) \\
\mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \\
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\
\tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o\left(x^8\right) \\
\arcsin(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left|\binom{-1/2}{k}\right| \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots + \left|\binom{-1/2}{n}\right| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right) \\
\arccos(x) &= \pi - \arcsin x \\
\arctan(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right) \\
\sinh(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \\
\cosh(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\
\tanh(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o\left(x^8\right) \\
(1+x)^a &= \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k + o(x^n) = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

Notation. On écrit $f(x) = \varepsilon(x)$ si $f\colon\ ]-a, a[\ \setminus \{0\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Définition. Soit $f\colon\ ]-a, a[\ \setminus \{x_0\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un ***développement limité d'ordre*** n ***en*** x_0 s'il existe un polynôme P_n de degré n tel que

$$f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0).$$

Remarque. Dans la définition précédente, le polynôme P_n, s'il existe, est unique.

Théorème (Taylor)**.** *Si une fonction réelle f et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies et continues en tout point d'un intervalle ouvert contenant le point a, alors f admet le* ***développement limité*** *à l'ordre n au point a donné par :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x-a),$$

où $\lim_{x\to a} \varepsilon(x-a) = 0$. *On note également $o((x-a)^n)$ la quantité $(x-a)^n \varepsilon(x-a)$.*

Règles de calcul pour les développements limités. Soient n un entier et I un intervalle ouvert contenant 0. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, admettant chacune un développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n), \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n).$$

Alors :

1. La somme $f+g$ admet un développement limité d'ordre n en 0, dont le polynôme de Taylor est la somme $P_n + Q_n$.
2. Le produit fg admet un développement limité d'ordre n en 0, dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degré inférieurs ou égaux à n dans le produit $P_n Q_n$.
3. Le quotient f/g admet un développement limité d'ordre n en 0, dont le polynôme de Taylor s'obtient par *division par puissances croissantes* jusqu'à l'ordre n de P_n par Q_n.
4. Si $g(0) = 0$, la compsée $f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n en 0, dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degré inférieurs ou égaux à n dans le polynôme composé $P_n \circ Q_n$.
5. Si f est $n-1$ fois dérivable sur I, dont la dérivée n-ième en 0 existe. Alors la dérivée f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en 0, dont le polynôme de Taylor est la dérivée de celui de f : $f'(x) = P_n'(x) + o(x^{n-1})$.
6. Toute primitive de f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0, dont le polynôme de Taylor est une primitive de celui de f.

Développements limités généralisés en un point et à l'infini. La fonction f admet un ***développement limité généralisé en un point*** $x_0 \in \mathbb{R}$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ si :

$$f(x) = \frac{b_p}{(x-x_0)^p} + \frac{b_{p-1}}{(x-x_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{b_1}{x-x_0} + a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

au voisinage de x_0.

Si $\mathcal{D}_f$ contient un intervalle $]a, +\infty[$, la fonction f admet un ***développement généralisé en*** $+\infty$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ si

$$f(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

au voisinage de $+\infty$ (c'est à dire pour x assez grand). Définition analogue au voisinage de $-\infty$.

5 Primitives et intégrales

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est ***integrable*** si il existe une fonction dérivable $F\colon I \to \mathbb{R}$ telle que $F' = f$. Un telle fonction F est une ***primitive*** de f.

Proposition. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est continue, elle est intégrable.*
2. *Si F est une primitive de f et $c \in \mathbb{R}$, alors $F + c$ est une primitive de f.*
3. *Toute primitive de f est de la forme $F + c$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$.*

Notation. On note $\int f$ une primitive quelconque de f.

Remarque. Si $a \in I$, alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Proposition. *Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $k \in \mathbb{R}$, alors :*

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

De même, si $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, alors $\int \Re(f(x))\,\mathrm{d}x = \Re\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)$ et $\int \Im(f(x))\,\mathrm{d}x = \Im\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

Primitives fondamentales.

$\int x^n \mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \neq -1$, $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + c$, $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$, $\int a^x \mathrm{d}x = (\log_a \mathrm{e})\, a^x + c$

$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + c$, $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + c$, $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + c$, $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + c$

$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + c$ $\int \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{argsh} x + c$, $\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + c$ $\int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + c$

$\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + c$, $\int \dfrac{1}{\cosh^2 x}\mathrm{d}x = \tanh x + c$, $\int \dfrac{1}{\sinh^2 x}\mathrm{d}x = \coth x + c$ x

Proposition (integration par changement de variables)**.** *Soit F une primitive de f et soit g une fonction dérivable. Alors la fonction $f(g(x))\, g'(x)$ est intégrable et*

$$\int f(g(x))\, g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + c.$$

Donc cette intégrale se calcule en posant $u = g(x)$ et $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$.

Proposition (intégration par parties)**.** *Soient f et g deux fonctions dérivables. Alors :*

$$\int f(x)\, g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Intégration des fractions rationnelles. On considère une fraction rationnelle $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ dont on cherche une primitive.

1. Par division euclidienne $N(x) = Q(x)\, D(x) + R(x)$, on obtient

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \text{ avec } \deg R(x) < \deg D(x).$$

2. On écrit $D(x)$ sous la forme $D(x) = c\,(x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_k)^{m_k} \left(x^2 + b_1 x + d_1\right)^{n_1} \cdots \left(x^2 + b_h x + d_h\right)^{n_h}$, puis on décompose la fraction $\dfrac{R(x)}{N(x)}$ sous forme d'éléments simples :

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{N(x)} = &\frac{A_{1,1}}{(x-a_1)} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} \\ &+ \cdots + \\ &+ \frac{A_{k,1}}{(x-a_k)} + \cdots + \frac{A_{k,m_k}}{(x-a_k)^{m_k}} \\ &+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2 + b_1 x + c_1} + \cdots + \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{(x^2 + b_{n_1} x + c_1)^{n_1}} \\ &+ \cdots + \\ &+ \frac{B_{h,1}x + C_{h,1}}{x^2 + b_h x + c_h} + \cdots + \frac{B_{h,n_h}x + C_{h,n_h}}{(x^2 + b_h x + c_h)^{n_h}}\end{aligned}$$

où les $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ et $C_{i,j}$ sont des nombres réels.

1. On intègre des termes de la forme $\dfrac{A}{x-a}$, $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $\dfrac{Bx+C}{x^2+bx+c}$, $\dfrac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}$. Pour cela, on a

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = A\ln|x-a| + c, \quad \int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c$$

et les autres termes se ramènent à calculer des intégrales du type $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Fonctions $f(x) = R(\sin x, \cos x)$, où f est une fraction rationnelle (règles de Bioche). On ramène

1. Si $f(-x) = -f(x)$: à l'aide de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on écrit $f(x) = \sin(x) A(\cos x)$, où A est une fraction rationnelle. On pose $u = \cos x$.
2. Si $f(\pi - x) = -f(x)$: à l'aide de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on écrit $f(x) = \cos(x) B(\sin x)$, où B est une fraction rationnelle. On pose $u = \sin x$.
3. Si $f(\pi + x) = f(x)$: on écrit $\cos x = \sin x / \tan x$ et $\sin^2 x = \tan^2 x / \left(1 + \tan^2 x\right)$. On se ramène ainsi à une fraction $F(\tan x)$. On pose $u = \tan x$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u / \left(1 + u^2\right)$.
4. Sinon, on pose $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, et $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\tan x = \frac{2u}{1-u^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$, pour se ramener en une fraction rationnelle en u.

Intégration d'expressions diverses. Ici, F est une fraction rationnelle.

1. $f(x) = F(\mathrm{e}^x, \sinh x, \cosh x, \tanh x)\,\mathrm{d}x$: on pose $u = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}u = u\mathrm{d}x$, on se ramène à une fraction rationnelle en u.
2. $f(x) = f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$: on pose $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, donc $x = \dfrac{b - dy^n}{cy^n - a}$, et $\mathrm{d}x = \dfrac{ad-bc}{(cy^n-a)^2} n y^{n-1}\mathrm{d}y$: fraction rationnelle en y.
3. $f(x) = F\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, x^{\frac{m_p}{n_p}}\right)$. On pose $n = \operatorname{pgcd}(n_1, \ldots, n_p)$, $x = t^n$ et donc $\mathrm{d}x = nt^{n-1}\mathrm{d}t$. On se ramène à une fraction rationnelle en t.
4. $f(x) = f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$. On se ramène à une des intégrales du type précédent, après mise sous forme canonique :
   (a) $\sqrt{t^2+1}$: $t = \sinh u$ et $\sqrt{t^2+1} = \cosh u$.
   (b) $\sqrt{t^2-1}$: $t = \pm\cosh u$ $(u > 0)$ et $\sqrt{t^2-1} = \sinh u$;
   (c) $\sqrt{1-t^2}$: $t = \sin u$ ou $\cos u$.

Proposition. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f. Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ représente l'aire de domaine compris entre le graphe Γ_f et l'axe des absisses, comptée positivement pour la partie située au-dessus de l'axe des absisses et négativement pour la partie située au dessous.*

Proposition (Relation de Chasles)**.** *Soient f une fonction intégrable sur $[a,b]$ et $c \in]a,b[$. Alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$