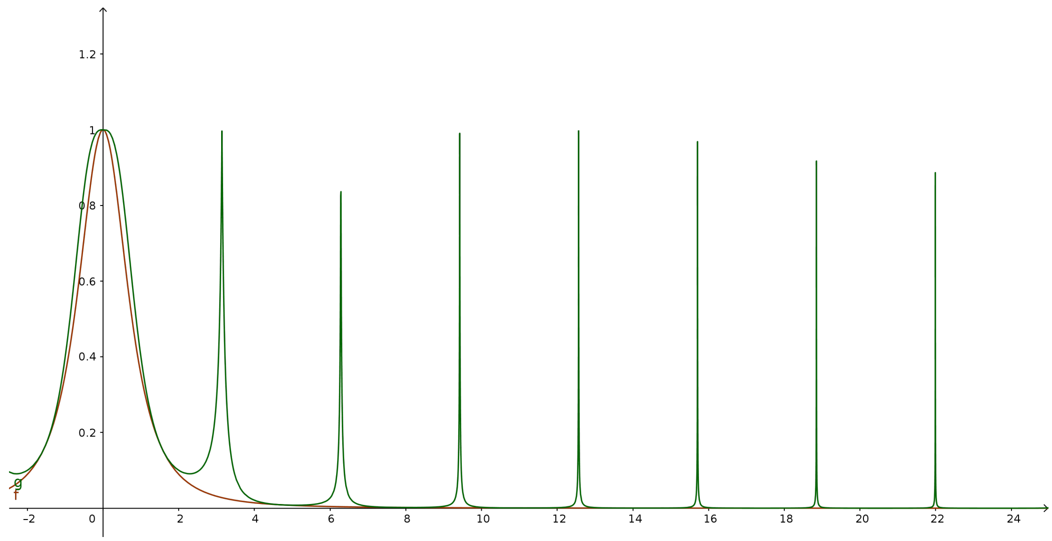
Calcul intégral - Corrigés de quelques exercices

1 Exercices divers sur suites d'intégrales et intégrales à paramètres

Corrigé de l'Exercice 3. On rappelle que, pour une fonction ***positive*** et localement intégrable sur $[a, b[$, et un suite strictement croissante $(x_n) \to b$ dans $[a, b[$, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la série de terme générale $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.



On va montrer que la série $\sum u_n$ converge. On a

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

avec $f_n(t) = \left(1 + (n\pi + t)^2 \sin t\right)^{-3/2}$.

Or,

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} f_n(\pi - s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(1 + (n\pi + \pi - s)^2 \sin(\pi - s)\right)^{-3/2} \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(1 + (n\pi + \pi - s)^2 \sin s\right)^{-3/2} \mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^{\pi/2} \left(1 + (n\pi + s)^2 \sin s\right)^{-3/2} \mathrm{d}s \text{ car } \pi - s > s
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } u_n \leq 2 \int_0^{\pi/2} f_n(s)\,\mathrm{d}s.$$

Or $\sin s \geq \frac{2}{\pi} s$ sur $[0, \pi/2]$, donc $f_n(s) \leq (1 + K_n s)^{-3/2}$ avec $K_n = 2\pi n^2$. En intégrant la fonction majorante, on trouve

$$u_n \leq -\frac{4}{K_n}\left[(1 + K_n s)^{-1/2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{K_n}\left(1 - \left(1 + K_n \frac{\pi}{2}\right)^{-1/2}\right) < \frac{4}{K_n} = \frac{2}{\pi n^2}.$$

Ainsi la série $\sum u_n$ converge, de même que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Corrigé de l'Exercice 2. 1. La fonction $f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha^2\cos^2 x + \beta^2\sin^2 x$ est continue et ne s'annule pas sur $[0,\pi]$, donc $g_{\alpha,\beta} = 1/f_{\alpha,\beta}$ est intégrable sur $[0,\pi]$.

Le changement de variable $t = \tan x$ est approprié lorsque l'intégrande est périodique de période π. On obtient:

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\alpha^2\cos^2 x + \beta^2\sin^2 x} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\alpha^2\cos^2 x + \beta^2\sin^2 x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\alpha^2 + \beta^2 t^2} = \frac{1}{\alpha\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\beta}{\alpha}\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}t\right)^2} = \frac{\pi}{\alpha\beta}.$$

2. On note $G(\alpha,\beta,x) = \dfrac{1}{\alpha^2\cos^2 x + \beta^2\sin^2 x}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et ses dérivées partielles $\dfrac{\partial G}{\partial \alpha}$ et $\dfrac{\partial G}{\partial \beta}$ vérifient:

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha}(\alpha,\beta,x) = \frac{-2\alpha\cos^2 x}{\left(\alpha^2\cos^2 x + \beta^2\sin^2 x\right)^2} \text{ et } \frac{\partial G}{\partial \beta}(\alpha,\beta,x) = \frac{-2\beta\sin^2 x}{\left(\alpha^2\cos^2 x + \beta^2\sin^2 x\right)^2}.$$

On peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres au voisinage de tout point (α,β). En effet, pour tout voisinage borné V d'une valeur (α_0,β_0) du paramètre, les fonctions continues $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial G}{\partial y}$ sont bornées sur $V\times[0,\pi]$ par une constante M, qui est une fonction intégrable sur le segment $[0,\pi]$ indépendante du paramètre (α,β). *On note que ce raisonnement ne pourrait pas s'appliquer directement si on travaillait sur un intervalle d'intégration non borné.*

On a donc :

$$\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial I}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) + \frac{1}{2\beta}\frac{\partial I}{\partial \beta}(\alpha,\beta) = \int_0^{\pi} \frac{-\cos^2 x\mathrm{d}x}{\left(\alpha^2\cos^2 x + \beta^2\sin^2 x\right)^2} + \int_0^{\pi} \frac{-\sin^2 x\mathrm{d}x}{\left(\alpha^2\cos^2 x + \beta^2\sin^2 x\right)^2} = -J(\alpha,\beta).$$

Donc

$$J(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial I}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) - \frac{1}{2\alpha}\frac{\partial I}{\partial \beta}(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}.$$

Corrigé de l'Exercice 7. 1. On a, par des résultats classiques (*le théorème fondamental de l'analyse*), $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$. Pour calculer g', on applique le théorème de dérivation sous le signe somme sur un voisinage V borné d'une valeur x_0 du paramètre. La fonction $(x,t) \mapsto \dfrac{\exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right)}{1+t^2}$ est bornée par une constante M sur $V\times[0,1]$, qui est une fonction indépendante du paramètre x et intégrable sur le segment $[0,1]$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\int_0^1 2x\left(1+t^2\right)\dfrac{\exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

2. Un changement de variable dans g' montre que $f'(x) + g'(x) = 0$, et donc que $f(x) + g(x) = f(0) + g(0) = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{\arctan(t)} = \dfrac{\pi}{4}$.

3. On considère une suite $(x_n) \to +\infty$, et on pose ;

$$h_n(t) = \frac{\exp\left(-x_n^2\left(1+t^2\right)\right)}{1+t^2}.$$

On voit que h_n est dominée, indépendamment de l'indice n, par la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ qui est intégrable sur $[0,1]$. Donc, d'après le Théorème de convergence dominée, on a :

$$g(x_n) = \int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 \lim_{n\to\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\mathrm{d}t = 0.$$

Puisque ceci est vrai pour toute suite $(x_n) \to +\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Corrigé de l'Exercice 8. On rappelle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}\lambda(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On se donne un nombre $a > 0$, et on considère la fonction $H_a\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$H_a(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-\left(at^2+\frac{x}{t^2}\right)}\mathrm{d}\lambda(t)$$

1. Pour $t \in \left]0,+\infty\right[$ la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\left(at^2+\frac{x}{t^2}\right)}$ est continue. De plus $\mathrm{e}^{-\left(at^2+\frac{x}{t^2}\right)} \leq \mathrm{e}^{-at^2}$ qui admet une intégrale impropre convergente sur $\mathbb{R}_+$. On conclut à l'aide du théorème de continuité des intégrales à paramètre.

2. On a

$$H_a(0) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-at^2\right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(\sqrt{a}t\right)^2\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-u^2\right) \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

3. La dérivée de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\left(at^2+\frac{x}{t^2}\right)}$ est donnée par $x \longmapsto -\frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-\left(at^2+\frac{x}{t^2}\right)}$. On fixe $\alpha > 0$. Pour $x \in \left]\alpha,+\infty\right[$, on a $\frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-\left(at^2+\frac{x}{t^2}\right)} \leq \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{t^2}} \leq \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{t^2}}$ qui admet une intégrale impropre convergente sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre permet de dire que H_a est dérivable sur $\left]\alpha,+\infty\right[$. Comme $\alpha > 0$ est quelconque, H_a est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$, avec

$$\forall x \in \left]0,+\infty\right[\ ,\ H_a'(x) = -\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-\left(at^2+\frac{x}{t^2}\right)}\mathrm{d}\lambda(t)$$

4. On calcule H_a' à l'aide du changement de variables $u = \sqrt{\frac{x}{a}}\frac{1}{t}$. On a

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]0,+\infty\right[\ ,\ H_a'(x) &= -\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-\left(at^2+\frac{x}{t^2}\right)}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{a}{x}}\int_{+\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{u^2}+au^2\right)}\mathrm{d}u \text{ avec } u = \sqrt{\frac{x}{a}}\frac{1}{t} \\ &= -\sqrt{\frac{a}{x}}H_a(x).\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{H_a'(x)}{H_a(x)} = -\sqrt{\frac{a}{x}} \quad \text{et} \quad H_a(x) = H_a(0)\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{ax}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-2\sqrt{ax}}.$$

Corrigé de l'Exercice 9. 1) On pose $f(x,t) = \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)}$. Pour des raisons de parité, la fonction F est égale, là où elle est définie, par :

$$F(t) = 2\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(x).$$

Il est clair que $F(0) = 0$. Si $t > 0$, on étudie la convergence de l'intégrale, en tant qu'intégrale de Riemann impropre :

i) A l'origine, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est prolongeable par continuité en posant $f(0,t) = t$. En effet, on a $f(x,t) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{tx}{x(1+x^2)} = \frac{t}{1+x^2}$.

ii) Au voisinage de $+\infty$, l'intégrale converge absolument, car $|f(x,t)| \sim \frac{C}{x^3}$.

On sait alors que si cette intégrale converge absolument au sens des intégrales impropres, l'intégrale de Lebesgue est bien définie et a la même valeur.

2) On applique le théorème de continuité, avec $E = \mathbb{R}_+$ et $T = \mathbb{R}_+$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, on pose $V_0 = \left[0, t_0+1\right[$.

i) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, La fonction $f(\cdot,x)$ est mesurable, car continue.

ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ (c'est à dire pour presque tout $x \in \mathbb{R}$), la fonction $f(t,\cdot)$ est continue sur V_0.

iii) Si $t = 0$, $f(x,t) = 0$. Si $t \neq 0$, on sait que la fonction $x \mapsto \frac{\arctan tx}{tx}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ par une constante M, car elle est continue et de limite égale à 1 en 0 et de limite nulle en $+\infty$. On a donc :

$$|f(x,t)| = \left| t\frac{\arctan(tx)}{tx} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right| \leq \frac{|t|\,M}{1+x^2} \leq (t_0+1)\cdot M \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

Ainsi f est dominée par une fonction intégrable de x indépendante de t.

La fonction F est donc continue en tout point $t_0 \in \mathbb{R}$.

3) On applique le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres. On sait déjà que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}$ est définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ par :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+x^2)}$$

On a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$ indépendante du paramètre t. Le théorème de dérivabilité s'applique :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{2}{(1+t^2x^2)(1+x^2)} \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(x)$$

On remarque que la fonction F est non seulement dérivable, mais de classe $\mathcal{C}^1$, en appliquant théorème de continuité à F'.
4) On calcule F' sur $\mathbb{R}_+^*$ afin d'en déduire F. On remarque que la valeur $t = 1$ conduit à la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$. Comme le dénominateur est de degré 4, on pourrait avoir des éléments simples avec des numérateurs dont le degré varie de 0 à 3, et donc mène à une intégration difficile. On travaille donc avec $t \neq 1$, pour lequel le dénominateur est le produit de deux facteurs irréductibles distincts de degré 2, ce qui mène à une décomposition en éléments simples plus commode. On a, pour $t \neq 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+t^2x^2)(1+x^2)} &= \frac{t^2}{t^2-1} \cdot \frac{1}{1+t^2x^2} - \frac{1}{t^2-1} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\
\int_0^{+\infty} \frac{2}{(1+t^2x^2)(1+x^2)} \mathrm{d}x &= \frac{t^2}{t^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2x^2} \mathrm{d}x - \frac{1}{t^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2t^2}{t^2-1} \frac{1}{t} \left[\arctan tx\right]_0^{+\infty} - \frac{2}{t^2-1} \left[\arctan x\right]_0^{+\infty} \\
&= \pi \left(\frac{t}{t^2-1} - \frac{1}{t^2-1} \right) = \pi \frac{1}{1+t}.
\end{aligned}$$

donc $F'(t) = \pi \cdot \dfrac{1}{1+t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Puisque F' est continue, on en déduit $F'(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

On en déduit $F(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\pi}{1+t} \mathrm{d}t = \pi \ln(1+t) + F(0) = \pi \ln(1+t)$ pour tout $t > 0$ (noter que $1+t > 0$ ce qui permet d'en prendre le logarithme).

5) On calcule maintenant I en intégrant par parties, en posant $u = \left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^2$ et $v' = 1$. Donc on prendra $v = x$ et

$$u' = 2.\frac{\arctan x}{x} \frac{\frac{1}{1+x^2} x - \arctan x}{x^2} = 2\frac{\arctan x}{x(1+x^2)} - 2\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2.$$

On donc :

$$\begin{aligned}
I &= 2\left([uv]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} u'v \right) \\
&= 0 - 2\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\arctan x}{x(1+x^2)} - \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(x) \\
&= -2F(1) + 2I, \text{ donc} \\
I &= 2F(1) = 2\pi \ln(2).
\end{aligned}$$

2 Intégrales multiples

Corrigé de l'Exercice 1. On utilise le changement de coordonnées polaires $\varphi\colon (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ de jacobien égal à r. L'équation du cercle s'écrit $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, c'est à dire $r = \cos\theta$. On a

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y) \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(x,y) &= \int_D \left(x^2+y^2+1\right) \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(x,y) = \int_{D_1} \left(r^2+1\right) r \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(r,\theta) \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\theta} \left(r^2+1\right) r \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\theta + 2\cos^2\theta}{4} \mathrm{d}\theta = \frac{11\pi}{32}.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'Exercice 2. Soit $U = \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \colon u > 0, v > 0, w > 0, uv < 1, uw < 1, vw < 1\right\}$.
1. U est ouvert, donc c'est un ensemble borélien.

2. On montre que $\varphi\colon U \to]0,1[^3$ est une bijection. Soit $(x,y,z) \in]0,1[^3$, on résout le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sqrt{vw} & = & x \\ \sqrt{uw} & = & y \\ \sqrt{uv} & = & z \end{array}\right. \quad \text{qui est équivalent à} \quad \left\{\begin{array}{rcl} vw & = & x^2 \\ uw & = & y^2 \\ uv & = & z^2 \end{array}\right.$$

On obtient la solution unique $u = \dfrac{yz}{x}$, $v = \dfrac{xz}{y}$ et $w = \dfrac{xy}{z}$. Ce triplet (u,v,w) est bien un élément de U. Ceci montre que $\varphi\colon U \to]0,1[^3$ est une bijection d'inverse $\psi\colon\ (x,y,z) \longmapsto \left(\dfrac{yz}{x}, \dfrac{xz}{y}, \dfrac{xy}{z}\right)$. Il reste à montrer que φ est un difféomorphisme local en tout point de U. Il revient au même de montrer que ψ est un difféomorphisme local en tout point de $]0,1[^3$. Or le déterminant jacobien de ψ en tout point est égal à 4, ce qui prouve le résultat.

3. On a

$$I = \int_U uvw\mathrm{d}\lambda\,(u,v,w) = \int_{]0,1[^3} \psi\,(x,y,z)\,|\det J\psi\,(x,y,z)|\,\mathrm{d}\lambda\,(x,y,z) = \int_{]0,1[^3} xyz4\mathrm{d}\lambda\,(x,y,z) = 4\left(\int_{]0,1[} x\mathrm{d}\lambda\,(x)\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

Corrigé de l'Exercice 3. 1. On peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} C = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_2\,(s,t)}{\cosh(s)\cosh(t)} &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_1\,(s)}{\cosh(s)}\right) \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_1\,(t)}{\cosh(t)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_1\,(s)}{\cosh(s)} \times \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_1\,(t)}{\cosh(t)} = \\ &= [2\arctan(\exp(s))]_{-\infty}^{+\infty} \times [2\arctan(\exp(t))]_{-\infty}^{+\infty} = 4\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= \pi^2 \end{aligned}$$

2. Il est clair que φ est un difféomorphisme de déterminant jacobien constant $\det(J\varphi\,(u,v)) = 2$. On a :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad f\quad} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & (s,t) = (u-v, u+v) & \longmapsto & f\,(s,t) \end{array}$$

On peut appliquer le théorème de changement de variables :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_2\,(s,t)}{\cosh s + \cosh t} &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_2\,(u,v)}{\cosh(u-v) + \cosh(u+v)} \quad \text{(noter le déterminant jacobien égal à 2)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_2\,(u,v)}{\cosh(u)\cosh(v) - \sinh(u)\sinh(v) + \cosh(u)\cosh(v) + \sinh(u)\sinh(v)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_2\,(u,v)}{2\cosh(u)\cosh(v)} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_2\,(s,t)}{\cosh(s)\cosh(t)} = C = \pi^2. \end{aligned}$$

3. On considère la fonction $H\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $H\,(x) = \int_{[0,+\infty[} \exp(-x\cosh t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}\,(t)$

3.1 Puisque $x > 0$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \exp(-x\cosh t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. D'une part, la fonction $t \mapsto \exp(-x\cosh t)$ est continue en 0, donc 0 n'est pas une borne critique de cette intégrale. D'autre part, $\cosh t \sim \dfrac{\mathrm{e}^t}{2} > t$ quand $t \to +\infty$[1], et donc $\exp(-x\cosh t) < \dfrac{x}{t^2}$ quand $t \to +\infty$. Par conséquent $t \mapsto \exp(-x\cosh t) \in \mathscr{L}^1([0,+\infty[)$, et donc H est bien définie.

Attention ! Le fait que $H\,(x)$ soit bien défini pour tout $x > 0$ ne résulte pas directement du fait que la fonction $g\colon\ (t,x) \mapsto \exp(-x\cosh t)$ soit supposée intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. En effet, le théorème de Fubini affirme qu'alors la fonction $t \mapsto \exp(-x\cosh t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour ***presque tout*** $x > 0$, et pas ***pour tout*** $x > 0$!

Si $0 < x < y$, alors $\exp(-x\cosh t) > \exp(-y\cosh t)$ et donc $H\,(x) > H\,(y)$. Donc H est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $g\colon\ (t,x) \mapsto \exp(-x\cosh t)$ est continue (et donc mesurable) sur $[0,+\infty[\, \times\,]0,+\infty[$. Soient $0 < a < x_0 < b$. Alors :

$$\forall x \in]a,b[\,,\ \forall t \in]0,+\infty[\,,\quad \exp(-x\cosh t) < h\,(t) = \exp(-a\cosh t)$$

Or $h \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+)$. D'après le théorème de continuité (théorème 2.9.1), la fonction H est continue sur $]a,b[$. Puisque a et b sont arbitraires, la fonction H est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

[1]On a même $\cosh t > t$ pour tout $t \geq 0$

Attention ! La continuité de H n'est pas une conséquence directe de la continuité de la fonction g. Il faut vérifier une hypothèse de domination.
Attention ! La fonction dominante doit être une fonction intégrable ***de la seule variable d'intégration*** t, et pas ***du seul paramètre*** x

- 4. En appliquant le théorème de Fubini à la fonction g sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, on déduit que la fonction H est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^*} H &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\int_{\mathbb{R}_+} g(t,x) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(t) \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(x) = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+} g \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} \exp(-x \cosh t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(x) \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(-\frac{1}{\cosh t} \left[\exp(-x\cosh t) \right]_0^{+\infty} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\cosh t} \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(t) = 2 \left[\arctan(\exp(t)) \right]_0^{+\infty} \\
&= 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

5. Toujours à l'aide du Théorème de Fubini-Tonelli, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} H^2 &= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} g(t,x) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(t) \right) \times \left(\int_{\mathbb{R}_+} g(s,x) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(s) \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(x) \\
&= \iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \exp\left(-x\left(\cosh(t) + \cosh(s)\right)\right) \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(x) \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(s,t) \\
&= \iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} -\frac{1}{\cosh(t) + \cosh(s)} \left[\exp\left(-x\left(\cosh(t) + \cosh(s)\right)\right) \right]_0^{+\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(s,t) \\
&= \iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \frac{1}{\cosh(t) + \cosh(s)} \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(s,t) \\
&= B = C = \pi^2.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'Exercice 4. 1) Si $\alpha \in [0, \pi/2]$ alors $\cos\alpha \geq 0$ et $x^2 + 2xy\cos\alpha + y^2 \geq x^2 + y^2$. Donc l'intégrale converge.
Si $\alpha \in [\pi/2, \pi[$ alors $-1 < \cos\alpha \leq 0$. De $x^2 + y^2 \geq 2xy$ on tire $\left(x^2+y^2\right)\cos\alpha \leq 2xy\cos\alpha$ et $x^2 + 2xy\cos\alpha + y^2 \geq \left(x^2+y^2\right)(1+\cos\alpha)$ où $1 + \cos\alpha > 0$. Ainsi l'intégrale converge.

On rappelle qu'on peut toujours parler l'intégrale d'une fonction positive en tant qu'élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$ (c'est à dire que la fonction soit intégrable ou non). On peut de plus déterminer la valeur d'une intégrale multiple d'une fonction positive à l'aide du théorème de changement de variables, sans avoir à vérifier préalablement l'intégrabilité de la fonction.

On considère donc le difféomorphisme $\varphi\colon\ ]0,+\infty[\times]0,\pi/2[\to \Delta$ défini par $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$, dont le déterminant jacobien est égal à r en tout point. On a donc, pour $\alpha \in]0,\pi[$:

$$\begin{aligned}
I_\alpha &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2(1+\cos\alpha\sin 2\theta)} r \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u(1+\cos\alpha\sin 2\theta)} \mathrm{d}u \mathrm{d}\theta \quad \text{or } 1 + \cos\alpha\sin 2\theta > 0 \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos\alpha\sin 2\theta} \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\alpha\sin 2\theta} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2t\cos\alpha + 1} \quad \text{en posant } t = \tan\theta \text{ et donc } \sin 2\theta = \frac{2t}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(t+\cos\alpha)}{(t+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \frac{1}{2\sin\alpha} \int_{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} \\
&= \frac{1}{2\sin\alpha} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \right) \right) = \frac{\alpha}{2\sin\alpha} \quad \text{car } \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan\frac{1}{x},
\end{aligned}$$

et donc $I = \dfrac{\alpha}{2\sin\alpha}$.

2) **Première méthode.** On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres au point $\alpha = 0$. Fixons $\alpha_0 \in]0, \pi/2[$ et posons $V_0 = [0, \alpha_0[$ qui est un voisinage de 0 dans l'espace métrique $T = [0, \pi[$.

i) On définit $f\colon [0,\alpha_0[\times \Delta \to \mathbb{R}_+$ par $f(\alpha,x,y) = \exp\left(-\left(x^2+2xy\cos\alpha+y^2\right)\right)$. Le paramètre est α et les variables d'intégration sont x, y. La fonction f est borélienne, car continue.

ii) Pour tout $(x,y) \in \Delta$, la fonction $f(\cdot,x,y)$ est continue au point $\alpha = 0$.

iii) Pour tout $\alpha \in V_0$, et tout $(x,y) \in \Delta$, on a $|f(\alpha,x,y)| \leq \exp\left(-\left(x^2+2xy\cos\alpha_0+y^2\right)\right)$. Il résulte donc de la question précédente que la fonction f est dominée sur $V_0 \times \Delta$ par une fonction intégrable de (x,y) (et indépendante du paramètre α).

La fonction $\alpha \mapsto \displaystyle\int_\Delta f(\alpha,x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$ est donc continue sur V_0. On en déduit que $I_0 = \dfrac{1}{2}$.

3) **Deuxième méthode.** On remarque que $I_0 = \displaystyle\int_\Delta \exp\left(-\left(x+y\right)^2\right)\mathrm{d}\lambda(x,y)$. Ce ceci suggère d'utiliser le changement de variable $u = x$, $v = x+y$, c'est-à-dire

$$\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u,v) \longmapsto (x,y) = (u, v-u),$$

qui est de déterminant jacobien constamment égal à 1. On a donc :

$$(u,v) \in D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2, u>0, v>u\right\} \xrightarrow{\psi} (x,y) = (u,v-u) \in \Delta \xrightarrow{f} f(x,y) = \exp\left(-(x+y)^2\right) = \exp\left(-v^2\right).$$

Le théorème de changement de variables donne donc :

$$I_0 = \int_{]0,+\infty[} \left(\int_{]u,+\infty[} \exp\left(-v^2\right)\mathrm{d}\lambda(v)\right)\mathrm{d}\lambda(u).$$

Cette intégrale semble impossible à calculer car on ne connaît pas la valeur de l'intégrale intérieure. Mais on peut intervertir le sens des intégrales en remarquant que

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon v>0, u \in]0,v[\right\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{]0,+\infty[} \left(\int_{]0,v[} \exp\left(-v^2\right)\mathrm{d}\lambda(u)\right)\mathrm{d}\lambda(v) = \int_{]0,+\infty[} \left(\int_{]0,v[} \mathrm{d}\lambda(u)\right)\exp\left(-v^2\right)\mathrm{d}\lambda(v) \\ &= \int_{]0,+\infty[} v\exp\left(-v^2\right)\mathrm{d}\lambda(v) = -\frac{1}{2}\left[\exp\left(-v^2\right)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4) On considère une suite $\alpha_n \in]0,\pi[$ qui tend en croissant vers π, et on définit $f_n\colon (x,y) \mapsto \exp\left(-\left(x^2+2xy\cos\alpha_n+y^2\right)\right)$. La suite (f_n) est une suite croissante de fonctions boréliennes (car continues) positives, dont la limite simple est $(x,y) \mapsto \exp\left(-\left(x^2-2xy+y^2\right)\right) = \exp\left(-(x-y)^2\right)$. Il résulte du théorème de convergence monotone que

$$I_\pi = \lim_{n\to+\infty} \int_\Delta f_n(x,y) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{\alpha_n}{\sin\alpha_n} = +\infty.$$