L3 - Calcul différentiel
TD - Théorème des fonctions implicites

Exercice 1 (Développement de Taylor d'une solution d'équation implicite)**.** On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x,y) = 0$ définit au voisinage de 0 une fonction $\varphi\colon x \mapsto \varphi(x) = y$ telle que $\varphi(0) = 1$.
2. Donner un développement limité de φ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 2 (Étude au voisinage de l'infini d'une solution d'équation implicite)**.** On considère le système $(\mathcal{S})$ d'équations :

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$$
$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 4.$$

1. Trouver la solution de $(\mathcal{S})$ de la forme $(0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, avec $y_0 > 0$ et $z_0 > 0$.
2. Montrer qu'il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $x \mapsto \varphi(x)$ et $x \mapsto \psi(x)$, définies au voisinage de l'origine, telles que $(x, \varphi(x), \psi(x))$ soit l'unique solution du système $(\mathcal{S})$ au voisinage de $(0, y_0, z_0)$.
3. Exprimer les dérivées $x \mapsto \varphi'(x)$ et $x \mapsto \psi'(x)$ en fonction de x, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.

Exercice 3 (Dérivées d'ordre supérieur d'une solution implicite de plusieurs variables)**.** On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2z(x+y) - 2x + y - 2z + 1, \text{ pour tous } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que l'équation $f(x,y,z) = 0$ définit au voisinage de $(0,0)$ une fonction implicite φ de deux variables telle que $z = \varphi(x,y)$ et $\varphi(0,0) = 1$.
2. Montrer l'existence et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de φ en $(0,0)$.

Exercice 4 (Surface définie comme enveloppe d'une famille à un paramètre de plans de $\mathbb{R}^3$)**.** On considère deux fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et la fonction $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$F(x,y,z,t) = (tx + yf(t) + g(t) - z, x + yf'(t) + g'(t)).$$

1. Donner des conditions suffisantes pour que l'équation $f(x,y,z,t) = 0$ définisse localement au voisinage de $(0,0)$ une fonction $\varphi : (x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y)) = (z,t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\varphi(0,0) = (0,0)$.
2. Montrer qu'on a, au voisinage de l'origine :

$$u'_x(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = v(x,y) \text{ et } u'_y(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = f(v(x,y)).$$

3. Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^2$ (les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues) au voisinage de $(0,0)$.
4. Montrer que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = 0$$

   au voisinage de $(0,0)$.