L3 - Calcul différentiel
TD - Sous-variétés et espace tangents

Exercice 1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $S_\lambda = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 - z^2 = \lambda\right\}$.

1. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles S_λ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
2. Pour ces valeurs, calculer l'équation du plan tangent à S_λ en un point $(x, y, z) \in S_\lambda$.

Exercice 2. On définit :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 4xy + 2xz + 4y - z = 0\right\}, \quad \mathcal{S}_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon xy + xz + 2x + 2y - z = 0\right\}.$$

1. Déterminer en quels points $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont des surfaces.
2. Déterminer en ces points les plans tangents à $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$.
3. On considère l'intersection $\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. En quels points $\mathcal{C}$ est-elle une courbe de $\mathbb{R}^3$?
4. Déterminer en ces points la droite tangente à $\mathcal{C}$.

Exercice 3. On considère l'application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie en tout point de $\mathbb{R}^2$ par $h(u, v) = \left(u + v, uv, u^2 + v^2\right)$.

1. En quels points $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ l'application h définit-elle un paramétrage d'une surface $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$?
2. Donner une équation implicite de $\mathcal{S}$.
3. Déterminer de deux manières l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en un point de $\mathcal{S}$.

Exercice 4. On considère les fonctions $g, h \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ et $h(x, y, z) = x + y + z - 1$.

1. En quels points l'ensemble $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon g(x, y, z) = 0 \text{ et } h(x, y, z) = 0\right\}$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?
2. Déterminer les extrema de la fonction $f \colon (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ en restriction à cette sous-variété.

Exercice 5 (facultatif)**.** On considère $\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^3 = 0\right\}$.

1. En quels points $(x, y) \in \mathcal{C}$ l'ensemble $\mathcal{S}$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?
2. Tracer C.
3. Déterminer et tracer sur le même dessin l'ensemble des points en lesquels deux tangentes à $\mathcal{C}$ se coupent orthogonalement. Pour cela :
   (a) Donner un paramétrage $M(t) = (x(t), y(t))$ de la courbe $\mathcal{C}$.
   (b) Ecrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point $M(t)$ de paramètre t.
   (c) Ecrire la condition sur t_1 et t_2 pour que les tangentes aux points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ soient orthogonales.
   (d) Conclure.