L3 – Calcul différentiel
TD – Théorème du point fixe et inégalité des accroissements finis

Exercice 1 (Recherche de contre-exemples)**.** 1. Donner un exemple d'espace métrique complet E et d'application 1-lipshchitzienne $f\colon E \to E$ sans point fixe.

2. Donner un exemple d'espace métrique complet E et d'application 1-lipshchitzienne $f\colon E \to E$ avec plusieurs points fixes.
3. Donner un exemple d'espace métrique non complet E et d'application k-lipshchitzienne $f\colon E \to E$ avec $0 < k < 1$ et f sans point fixe.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{C}^2\left([a,b], \mathbb{R}\right)$, telle que $f' > 0$ sur $[a,b]$ et $f(a) < 0 < f(b)$.

1. Rappeler pourquoi il existe un unique point $c \in \,]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.
2. Montrer qu'il existe un voisinage $[\alpha,\beta] \subset \,]a,b[$ de c sur lequel la fonction $F\colon x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ est une contraction.
3. En déduire la construction d'une suite définie à l'aide de F dont la limite est le point c.
4. On considère la fonction $f\colon\ [1,2] \to \mathbb{R}$ définie pr $f(x) = x^2 - 2$.
   (a) Montrer que les hypothèses précédentes sont vérifiées.
   (b) Calculer la fonction F associée à f.
   (c) Soient $x_0 = 1$ et (x_n) la suite récurrente définie par x_0 et la relation $x_{n+1} = F(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
      i. Montrer que (x_n) converge vers $c = \sqrt{2}$.
      ii. On pose $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Détermier un entier N tel que pour tout $n \in N$ on ait $|x_n - c| < \varepsilon$.

Exercice 3. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$:

$$\left\|A^3 - B^3\right\| \leq 3 \max\left(\|A\|^2, \|B\|^2\right) \|B - A\|.$$

.

Exercice 4. On désigne par $B = B(0,1)$ la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^2$ pour la norma $\|\cdot\|_2$. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq 0 \text{ et } f(0,0) = 0.$$

1. Calculer la différentielle de f en tout point de B.
2. En déduire que pour tous $a,b \in B$, $|f(a) - f(b)| \leq \|a-b\|_1$.

Exercice 5. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe, et soit $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable dont les dérivées partielles vérifient

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq 1, \forall x \in U, i = 1, \ldots, n.$$

1. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$. Montrer que
$$\|\mathrm{d}_a f\| \leq 1, \quad \forall a \in U.$$
   Ce résultat reste-t-il vrai si on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$?
2. En déduire que
$$|f(b) - f(a)| \leq \|b-a\|_1, \quad \forall a,b \in U.$$

Exercice 6. Montrer que la suite de points de $\mathbb{R}^2$ définie par une condition initiale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et la relation de récurrence

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\cos x_n - \sin y_n, \sin x_n - \cos y_n\right)$$

converge, et déterminer sa limite.