L3 - Calcul différentiel
TD - Espaces vectoriels normés et applications différentiables

Exercice 1. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées de taille n, qu'on munit d'une norme $\|\cdot\|$. Soit $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices réelles *orthogonales*, c'est à des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA \cdot A = \mathrm{Id}_n$.

1. Montrer que $\mathcal{O}(n)$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que l'application qui a tout élément de $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ associe son inverse est continue.

Exercice 2. On considère un espace vectoriel E de dimension finie. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de vecteurs de E telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est colinéaire à } v_n,\ u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u,\ v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v.$$

Montrer que u et v sont colinéaires (on pourra raisonner par l'absurde en supposant que u et v ne sont pas colinéaires, et compléter (u,v) en une base de E).

Exercice 3. Soit $f\colon (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $|f(x)| \leq \|x\|^2$ au voisinage de l'origine. Montrer que f est différentiable en 0 et calculer $\mathrm{d}_0 f$.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable à l'origine telle que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$. On note $\ell = \mathrm{d}_0 f$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :
$$\lambda f(x) - \lambda \ell(x) = o(\lambda).$$
2. En déduire que f est une application linéaire.

Exercice 5. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right) \ln\left(x^2 + y^2\right)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, puis sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Montrer que l'application $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(A) = \mathrm{tr}\left(A^3\right)$ est différentiable et calculer son application différentielle.