L3 - Calcul différentiel
TD - Difféomorphismes, Théorème d'Inversion Locale

Exercice 1. On considère une fonction $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle qu'il existe $0 < k < 1$ avec $|h'(t)| \leq k$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x - h(y), y - h(x))$$

est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Exercice 2. Soient $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On considère l'application

$$F \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (x + y, f(x) + g(y)).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. On suppose réalisée la condition précédente. On suppose de plus qu'il existe $k > 0$ tel que $|f'(x)| \geq k$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et que g est bornée. Montrer que F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Il s'agit de résoudre l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3(x - y) f = 0 \qquad (*)$$

1. Montrer que l'application $\varphi \colon (x, y) \mapsto (u, v) = (xy, x + y)$ est un difféomorphisme de $\Delta = \{(x, y) : x - y > 0\}$ sur $\Delta' = \big\{(u, v) : v^2 - 4u > 0\big\}$.
2. On suppose qu'une fonction f est solution de $(*)$, et on définit g par $f = g \circ \varphi$. Montrer que g est solution de
$$\frac{\partial g}{\partial u} - 3g = 0.$$
3. En déduire la forme générale des solutions de $(*)$.

Exercice 4.
1. Montrer que l'application $\Phi \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ définie par
$$(x, y) = \Phi(u, v) = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}, \frac{u}{v}\right)$$
est un difféomorphisme.
2. Soient $f \colon \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g = f \circ \Phi$. Pour $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on pose $(x, y) = \Phi(u, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u, v)$ en fonction des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
3. En déduire l'expression des dérivées patrielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en fonction des $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u, v)$.
4. En déduire l'ensemble des solutions $f \colon \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation $2x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\left(1 + y^2\right)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Exercice 5. Soit $U = \big\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \colon u > 0, v > 0, w > 0, uv < 1, uw < 1, vw < 1\big\}$.
1. Rappeler pourquoi U est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que l'application $\varphi \colon U \to \left]0, 1\right[^3$ définie par $\varphi(u, v, w) = (\sqrt{uv}, \sqrt{uw}, \sqrt{vw})$ est un difféomorphisme local, dont on calculera le difféomorphisme réciproque.