L3 - Calcul différentiel
TD - Espaces vectoriels normés de dimension finie, applications continues

Exercice 1. On considère l'application $N\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $N(a,b) = \sup_{t\in[0,1]} |a+tb|$.

1. Montrer que, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $N(a,b) = \max\{|a|, |a+b|\}$.
2. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. Représenter la boule unité fermée pour cette norme.
4. Comparer la norme N avec la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$; plus précisément, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$:

$$N(x) \leq 2\|x\|_\infty \text{ et } \|x\|_\infty \leq 2N(x).$$

   Conclusion ?

Exercice 2. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$.

1. Montrer que l'ensemble $K = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \colon \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 1\right\}$ est compact.
2. Qu'en est-il de $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 1\}$?

Exercice 3 (*Norme de Frobenius*)**.** On considère l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $N(A) = \sqrt{\operatorname{tr}({}^tA \cdot A)}$ (où $\operatorname{tr}(M)$ représente la *trace* de la matrice M).

1. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il s'agit d'une norme matricielle (on pourra utiliser, après l'avoir rappelée, l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
3. S'agit-il d'une norme subordonnée ?

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ d'une norme $\|\cdot\|$. On définit la fonction $F\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ par $F(P) = \int_0^1 P(t)^2 \, \mathrm{d}t$.

1. S'agit-il d'une application linéaire ?
2. Est-elle injective, surjective ?
3. Montrer que F est continue.