

L3 - Calcul différentiel

TD - Espaces vectoriels normés de dimension finie, applications continues

Exercice 1. On considère l'application $N: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $N(a, b) = \sup_{t \in [0,1]} |a + tb|$.

1. Montrer que, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $N(a, b) = \max\{|a|, |a + b|\}$.
2. Montrer que N est une norme sur \mathbb{R}^2 .
3. Représenter la boule unité fermée pour cette norme.
4. Comparer la norme N avec la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$; plus précisément, déterminer deux constantes positives k_1 et k_2 telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$:

$$N(x) \leq k_1 \|x\|_\infty \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty \leq k_2 N(x).$$

Conclusion ?

Exercice 2. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.

1. Montrer que l'ensemble $K = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 1\}$ est compact.
2. Qu'en est-il de $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 1\}$?

Exercice 3 (*Norme de Frobenius*). On considère l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $N(A) = \sqrt{\text{tr}({}^t A \cdot A)}$ (où $\text{tr}(M)$ représente la *trace* de la matrice M).

1. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il s'agit d'une norme matricielle (on pourra utiliser, après l'avoir rappelée, l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
3. S'agit-il d'une norme subordonnée ?

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ d'une norme $\|\cdot\|$. On définit la fonction $F: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ par $F(P) = \int_0^1 P(t)^2 dt$.

1. S'agit-il d'une application linéaire ?
2. Est-elle injective, surjective ?
3. Montrer que F est continue.