L3 - Calcul différentiel
TD - Applications différentiables, suite

Exercice 1. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien :

$$\langle x, y\rangle \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \text{ où } x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ et y=}(y_1, \ldots, y_n).$$

Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et donner sa différentielle en tout point $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Etudier la différentiabilité de la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}[X]_d$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à d. Etudier la différentiabilité de l'application $P \mapsto P' - P^2$.

Exercice 4. On muni l'espace $\mathbb{R}^2$ d'une norme $\|\cdot\|$. On considère une application différentiable $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, qu'on suppose *propre* : $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$. On suppose de plus qu'en tout point $a \in \mathbb{R}^2$, la différentielle $\mathrm{d}_x f$ est injective.

1. Donner un exemple (non trivial) d'une telle application.
2. On fixe $a \in \mathbb{R}^2$, et on considère la fonction $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto g(x) = \|f(x) - a\|^2$.
   (a) Calculer la différentielle $\mathrm{d}_x g$ en tout point $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que g atteint sa borne inférieure en un point $x_0 \in \mathbb{R}^2$, et que $\mathrm{d}_{x_0} g = 0$.
   (c) En déduire que f est surjective.
3. L'exercice montre donc que toute application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, propre et de différentielle injective en tout point, est surjective. Montrer sur des exemples que ceci n'est plus vrai si on enlève l'une des deux hypothèses.