Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3

Novembre 2014

CORRIGE - CALCUL DIFFERENTIEL - PREMIER PARTIEL

I (*6 pts*)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathcal{M}_n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille (n, n) et par $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel des matrices carrées symétriques. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n$ on désigne par ${}^tM$ la transposée de M.

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n$ une matrice symétrique inversible. On considère l'application

$$f\colon \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n, \quad M \in \mathcal{M}_n \longmapsto {}^tMA_0M.$$

1. (***1 pt***) Montrer que f est une application différentiable. f est une composée d'applications polynômiales donc est différentiable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$).
2. (***3 pts***) Soit $I_n \in \mathcal{M}_n$ la matrice identité. Calculer la différentielle $\mathrm{d}_{I_n}f$ (en précisant soigneusement à quel espace appartient cette application). Soit $H \in \mathcal{M}_n$. On a

$$\begin{aligned} f(I_n + H) &= {}^t(I_n + H)\, A_0\, (I_n + H) \\ &= A_0 + {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0H. \end{aligned}$$

Or $\|{}^tHA_0H\| \leq \|H\|^2 \|A_0\|$ donc ${}^tHA_0H = \|H\|\,\varepsilon(H)$ avec $\varepsilon(H) \underset{H\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc la différentielle de f en I_n est donnée par

$$\mathrm{d}_{I_n}f\colon \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n, \quad H \longmapsto {}^tHA_0 + A_0H.$$

3. (***2 pts***) Montrer que $\mathrm{d}_{I_n}f$ est surjective. Déterminer le noyau de $\mathrm{d}_{I_n}f$. Soit $M \in \mathcal{S}_n$. On cherche $H \in \mathcal{M}_n$ telle que ${}^tHA_0 + A_0H = M$, c'est à dire, puisque A_0 est symétrique, ${}^t(A_0H) + A_0H = M$. Or M est symétrique, donc ${}^tM + M = 2M$. Un antécédant de M par H est donc $\frac{1}{2}A_0^{-1}M$.

   Soit $H \in \mathcal{M}_n$ telle que $\mathrm{d}_{I_n}f(H) = 0$, c'est à dire ${}^tHA_0 + A_0H = 0$. Cette égalité signifie que la matrice A_0H est *antisymétrique*. Le noyau de $\mathrm{d}_{I_n}f$ est donc l'ensemble des matrices $H = A_0^{-1}N$, où N est une matrice antisymétrique.

II (*5 pts*)

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les nombres réels a et b pour que l'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x + a\sin(y), y + b\sin(x))$$

soit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même. Le jacobien de f au point (x, y) est donné par

$$J = \begin{vmatrix} 1 & a\cos(y) \\ b\cos(x) & 1 \end{vmatrix} = 1 - ab\cos(x)\cos(y).$$

Les valeurs de $\cos x \cos y$ sont comprises entre -1 et 1. Donc si $|ab| < 1$, ce déterminant J ne s'annule en aucun point. Inversement, si $|ab| \geq 1$, alors $-1 \leq \dfrac{1}{ab} \leq 1$, et donc J s'annule au point $\left(0, \arccos\left(\dfrac{1}{ab}\right)\right)$. Donc f est un difféomorphimse local en tout point si et seulement si $|ab| < 1$.

Sous cette même condition, f est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit en effet $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Montrons qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que $f(x, y) = (u, v)$. On cherche donc à résoudre le système

$$\begin{aligned} x + a\sin y &= u \\ b\sin x + y &= v. \end{aligned}$$

De la première équation on tire $x = u - a\sin y$. En reportant dans la deuxième équation il vient $y = v - b\sin(u - a\sin y)$. Il s'agit donc de résoudre un problème de point fixe. Or la dérivée de la fonction $g : y \mapsto v - b\sin(u - a\sin y)$ est donnée par $g'(y) = ab\cos y\cos(u - a\sin y)$. Cette dérivée est bornée par $k = |ab| < 1$ sur $\mathbb{R}$. Il résulte donc du théorème des accroissements finis et du théorème du point fixe appliqués à g sur l'espace métrique *complet* $\mathbb{R}$ que g a un unique point fixe y_0 dans $\mathbb{R}$.

L'unique antécédant de (u, v) par f est donc le point $(u - a\sin y_0, y_0)$.

III (7 *pts*)

On considère l'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x+y), 1+\frac{2}{3}\arctan(x-y)\right).$$

1. (***3 pts***) Montrer qu'il existe une norme sur $\mathbb{R}^2$ telle que f soit contractante pour cette norme. La norme $\|\cdot\|_1$ convient. En effet, on remarque que la matrice jacobienne de f en un point (x,y) est

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\cos(x+y) & \frac{1}{4}\cos(x+y) \\ \frac{2}{3}\frac{1}{1+(x-y)^2} & -\frac{2}{3}\frac{1}{1+(x-y)^2} \end{pmatrix}.$$

On a alors, pour tout $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$,

$$\|M\cdot h\|_1 = |ah_1+ch_2| + |bh_1+dh_2| \leq \frac{1}{4}|h_1+h_2| + \frac{2}{3}|h_1+h_2| \leq \frac{11}{12}\|h\|_1.$$

Il résulte de l'inégalité des accroissements finis que l'application f est contractante de rapport $\frac{11}{12}$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.

2. (***2 pts***) Montrer que f admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}^2$. Cela résulte du théorème du point fixe appliqué à l'application f sur l'espace *complet* $\mathbb{R}^2$.

3. (***2 pts***) En quels points l'application f est-elle un difféomorphisme local ? Le déterminant jacobien en un point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est donné par

$$J = \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\cos(x+y)\frac{1}{1+(x-y)^2}\times(-2) = -\frac{1}{3}\frac{\cos(x+y)}{1+(x-y)^2}.$$

Ce déterminant s'annulle exactement aux points (x,y) tels que $\cos(x+y)=0$, c'est à dire aux points de la forme $\left(x, \frac{\pi}{2}-k\pi-x\right)$ où $x\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{Z}$.

IV (4 *pts*)

Existe-t-il une application d'un espace métrique sur lui-même qui soit contractante (c'est-à-dire k-lipschitzienne avec $0<k<1$) mais sans points fixes ? Si la réponse est NON expliquer pourquoi, et si la réponse est OUI donner un exemple. La réponse est OUI. Il suffit de considérer une application contractante f sur un espace métrique complet E. Cette application a donc un point fixe *unique* $p\in E$. Un exemple possible est alors la restriction $f|_{E\setminus\{p\}}$ de f à $E\setminus\{p\}$.