Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3 Novembre 2018

CALCUL DIFFERENTIEL - CORRIGÉ DU PARTIEL (2 heures)

Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

I *(7 pts)*

Soient U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On considère l'application $\varphi\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\varphi(x) = \alpha(x)\,x, \ \forall x \in U.$$

1. ***(3 pts)*** Montrer que l'application $B\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui a tout couple $(\lambda, x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ associe $\lambda x \in \mathbb{R}^n$ est différentiable sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, et que sa différentielle en tout point $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ est l'application linéaire :

$$\mathrm{d}_{(\lambda_0,x_0)}B\colon\ (s,h) \longmapsto sx_0 + \lambda_0 h,\ \forall (s,h) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

   Soient $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et $(s,h) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. On a :

$$B(\lambda_0 + s, x_0 + h) = (\lambda_0 + s)(x_0 + h) = \lambda_0 x_0 + \lambda_0 h + s x_0 + sh.$$

   Or, au voisinage de l'origine, $\|sh\|_\infty = |s|\,\|h\|_\infty \leq |s|\,\|(s,h)\|_\infty = o((s,h))$. Ce qui montre que B est différentiable au point (λ_0, x_0) de différentielle $\mathrm{d}_{(\lambda_0,x_0)}B\colon\ (s,h) \mapsto sx_0 + \lambda_0 h$.
   Le seul point éventuellement délicat de cette question est de montrer que $sh = o((s,h))$. D'autre part, la bonne façon de procéder est de montrer la différentiabilité de B *en même temps* qu'on calcule la différentielle de B au point (s_0, x_0).

2. ***(4 pts)*** En déduire que l'application φ est différentiable sur U, et donner sa différentielle en tout point de U. On écrit φ comme une composition d'applications différentiables :

$$x \xmapsto{G} (\alpha(x), x) \xmapsto{B} \alpha(x)\,x.$$

   Ce qui montre que φ est différentiable sur $\mathbb{R}$, et que sa différentielle en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est l'application linéaire donnée, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, par :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{x_0}\varphi(h) &= \mathrm{d}_{x_0}(B\circ G)(h) = \mathrm{d}_{G(x_0)}B(\mathrm{d}_{x_0}G(h))\\ &= \mathrm{d}_{(\alpha(x_0),x_0)}B(\mathrm{d}_{x_0}\alpha(h), h)\\ &= \mathrm{d}_{x_0}\alpha(h)\,x_0 + \alpha(x_0)\,h.\end{aligned}$$

   Pour cette question, on ne peut pas "tricher" en disant qu'on différentie $\alpha(x)\,x$ comme un *produit de deux fonctions réelles*, avec la règle $(uv)' = u'v + uv'$. Il s'agit bien ici du produit du *vecteur* x par le *scalaire* $\alpha(x)$. Donc une preuve appropriée s'impose. Compte tenu de la question précédente, il est donc naturel de procéder à la différentiation de l'application composée $B\circ G$.

II *(4 pts)*

Pour $n \geq 0$, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels, et par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble ouvert des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$. On rappelle que l'application $S\colon X \mapsto X^{-1}$ est différentiable sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que sa différentielle en tout $M_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'application $H \mapsto \mathrm{d}_{M_0}S(H) = -M_0^{-1}HM_0^{-1}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application

$$g_A\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ M \longmapsto \mathrm{tr}\left(M^{-1}A\right)$$

est différentiable, et donner sa différentielle en tout point $M_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On écrit g_A comme une composée d'applications différentiables :

$$M \xmapsto{S} M^{-1} \xmapsto{L_A} M^{-1}A \xmapsto{\mathrm{tr}} \mathrm{tr}\left(M^{-1}A\right).$$

Ce montre que g_A est différentiable sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et, pour tout $M_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{M_0}g_A(H) &= \mathrm{d}_{M_0}(\mathrm{tr}\circ L_A\circ S)(H) = \mathrm{d}_{(L_A(S(M_0)))}\mathrm{tr}\left(\mathrm{d}_{S(M_0)}L_A(\mathrm{d}_{M_0}S(H))\right)\\ &= \mathrm{tr}\left(L_A\left(-M_0^{-1}HM_0^{-1}\right)\right) = -\mathrm{tr}\left(M_0^{-1}HM_0^{-1}A\right),\end{aligned}$$

car tr et L_A sont des applications linéaires.
Remarque : l'indication était donnée avec une erreur dans l'énoncé. On y lisait $\mathrm{d}_{M_0}S(H) = -M_0 H M_0$ au lieu de $\mathrm{d}_{M_0}S(H) = -M_0^{-1} H M_0^{-1}$. Donc le résultat $\mathrm{d}_{M_0}g_A(H) = -\mathrm{tr}(M_0 H M_0 A)$, consécutif à cette indication, a été considéré comme correct au moment de la correction (*à condition, toutefois, qu'il ait été obtenu à l'issue d'un raisonnement correct et bien rédigé !*).
D'autre part, plusieurs étudiants on obtenu une expression pour $\mathrm{d}_{M_0}g_A(H)$ qui n'était *pas linéaire en H*. C'est évidemment un résultat complétement faux !

Enfin, le bon réflexe ici est de raisonner en utilisant la formule de la différentielle de la composée d'applications, plutôt que de refaire le calcul direct de la différentielle à partir de la définition de g_A.

III *(6 pts)*

Pour $n \geq 1$, on considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. ***(2 pts)*** Montrer que l'application $N : E \to \mathbb{R}_+$ définie par $N(P) = \sum_{k=0}^{n} |P(k)|$ est une norme sur E. On montre aisément l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. Il est également clair que $N(0) = 0$. Réciproquement, soit $P \in E$ tel que $N(P) = 0$. On a donc $P(0) = P(1) = \cdots = P(n) = 0$. Or le seul polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admette $n+1$ racines est le polynôme nul.
2. On pose $n = 1$.
   i) ***(1 pt)*** En utilisant l'isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^2$ qui identifie le polynôme $aX + b$ avec le couple (a, b), représenter le cercle unité $\mathcal{S}^1$ de E pour la norme N. Par cet isomorphisme, $\mathcal{S}^1 = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |b| + |a + b| = 1\right\}$.
   ii) ***(2 pts)*** Montrer que $\mathcal{S}^1$ est un ensemble compact. L'application N est continue pour l'espace vectoriel normé (E, N). Donc $\mathcal{S}^1 = N^{-1}(1)$ est un ensemble fermé, en tant qu'image réciproque du fermé $\{1\}$ par une application continue. Puisqu'il est également borné (car constitué de vecteurs de norme 1), il est compact (car nous travaillons dans un espace vectoriel de dimension finie).
   iii) ***(2 pts)*** Montrer que la fonction $f : P \mapsto \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$ est continue pour la norme N, et déterminer le maximum de f sur $\mathcal{S}^1$. En utilisant l'isomorphisme ci-dessus, on a $f(a, b) = \dfrac{a}{2} + b$. C'est une application polynomiale de (a, b), elle est donc continue. Elle est ainsi bornée et atteint ses bornes sur le compact $\mathcal{S}^1$. Sur la composante de $\mathcal{S}^1$ donnée par $a + 2b = 1$, la fonction $(a, b) \mapsto \frac{a}{2} + b$ vaut est constante de valeur $\frac{1}{2}$. Sur la composante donnée par $a = 0$, $-1 \leq b \leq 0$, elle atteint son maximum quand $b = 0$. Donc $\sup_{P \in \mathcal{S}^1} f(P) = \dfrac{1}{2}$.

Afin de montrer que N est une norme, il faut entre autre montrer que $N(P) = 0$ implique $P = 0$. Cela a été très souvent mal fait. En effet, Si $N(P) = 0$, alors P admet les $n+1$ racines $0, 1, \ldots, n$. Puisque le degré de P est inférieur ou égal à n, P est donc le polynôme nul. Toute preuve qui ne mentionne pas *explicitement* qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à n et qui admet $n+1$ racines est identiquement nul n'est pas acceptable. Donc, sans cette phrase, *on ne peut considérer qu'il a été démontré que N est une norme*.

Lorsqu'on parle de l'image réciproque d'un ensemble fermé par une application, *sans mentionner le fait qu'elle est continue*, on n'a rien dit du tout !

Si on oublie les valeurs absolues, l'équation du cercle S^1 devient $a + 2b = 1$, qui est l'équation d'une droite : or une droite ne peut être bornée, quelle que soit la norme considérée : elle n'a donc aucune chance d'être un cercle unité !

IV *(3 pts)*

Donner un exemple de fonction qui admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en un point sans être continue en ce point. On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^2}{y}$ si $y \neq 0$ et $f(x, y) = 0$ sinon. Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Si $h_1 \neq 0$, on a

$$\frac{f(th)}{t} = \frac{t^2 h_1^2}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} 0.$$

Et si $h_2 = 0$, $f(th) = 0$. Donc f admet une dérivée directionnelle nulle à l'origine dans toutes les directions.

Mais f n'est pas continue à l'origine. En effet, $f(0, 0) = 0$, alors que, si (x, y) appartient à la parabole d'équation $y = x^2$, $f(x, y) = 1$.