Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3 Novembre 2018

CALCUL DIFFERENTIEL - PARTIEL (2 heures)

Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

I *(7 pts)*

Soient U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On considère l'application $\varphi\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\varphi(x) = \alpha(x)\, x,\ \forall x \in U.$$

1. ***(3 pts)*** Montrer que l'application $B\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui a tout couple $(\lambda, x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ associe $\lambda x \in \mathbb{R}^n$ est différentiable sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, et que sa différentielle en tout point $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ est l'application linéaire :
$$\mathrm{d}_{(\lambda_0,x_0)}B\colon\ (s,h) \longmapsto s x_0 + \lambda_0 h,\ \forall (s,h) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$
2. ***(4 pts)*** En déduire que l'application φ est différentiable sur U, et donner sa différentielle en tout point de U.

II *(4 pts)*

Pour $n \geq 0$, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels, et par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble ouvert des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$. On rappelle que l'application $S\colon X \mapsto X^{-1}$ est différentiable sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que sa différentielle en tout $M_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'application $H \mapsto \mathrm{d}_{M_0}S(H) = -M_0^{-1} H M_0^{-1}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application

$$g_A\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ M \longmapsto \mathrm{tr}\left(M^{-1}A\right)$$

est différentiable, et donner sa différentielle en tout point $M_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

III *(7 pts)*

Pour $n \geq 1$, on considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. ***(2 pts)*** Montrer que l'application $N\colon E \to \mathbb{R}_+$ définie par $N(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |P(k)|$ est une norme sur E.
2. On pose $n = 1$.
   i) ***(1 pt)*** En utilisant l'isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^2$ qui identifie le polynôme $aX + b$ avec le couple (a, b), représenter le cercle unité $\mathcal{S}^1$ de E pour la norme N.
   ii) ***(2 pts)*** Montrer que $\mathcal{S}^1$ est un ensemble compact.
   iii) ***(2 pts)*** Montrer que la fonction $f\colon P \mapsto \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$ est continue pour la norme N, et déterminer le maximum de f sur $\mathcal{S}^1$.

IV *(3 pts)*

Donner un exemple de fonction qui admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en un point sans être continue en ce point.