Université de Bourgogne — Novembre 2017
Département de Mathématiques - L3

CALCUL DIFFERENTIEL - PARTIEL (2 heures)

Les quatre exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

I (*4 pts*)

1. ***(2 pts)*** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Sa réciproque est-elle également de classe $\mathcal{C}^1$?
2. ***(2 pts)*** Donner un exemple de fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui est un difféomorphisme local en tout point sans être un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

II (*6 pts*)

Pour $n \geq 0$, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels. On fixe une matrice inversible $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. ***(3 pts)*** Montrer que l'application $G\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $M_0 \cdot M^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est différentiable, et déterminer la différentielle $\mathrm{d}_M f$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. ***(3 pts)*** L'application G est-elle un difféomorphisme local en tout point $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

III (*5 pts*)

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$ et soit $g = f \circ f$.

1. ***(1 pt)*** Rappeler pourquoi f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2. ***(2 pts)*** Calculer en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la matrice jacobienne $J_{(x,y)}f$, ainsi que la matrice jacobienne $J_{(0,0)}g$.
3. ***(2 pts)*** En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que g admette un unique point fixe dans la boule fermée $\overline{B}_r((0,0))$ de centre $(0,0)$ et de rayon r. Sans calculer g, déterminer ce point fixe.

IV *(5 pts)*

On définit $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}}.$$

1. ***(2 pts)*** Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, encore notée f.
2. ***(2 pts)*** Etudier l'existence de dérivées directionnelles à l'origine pour cette fonction.
3. ***(1 pt)*** La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?