Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3 Novembre 2016

CALCUL DIFFERENTIEL - PARTIEL

I (*4 pts*)

Question de cours.

1. ***(2 pts)*** Enoncer le Théorème du point fixe.
2. ***(1 pt)*** Donner un exemple où le théorème n'est plus valide si on omet l'hypothèse sur l'espace ambiant (en gardant l'hypothèse sur la fonction f).
3. ***(1 pt)*** Donner un exemple où le théorème n'est plus valide si on omet l'hypothèse sur la fonction f (en gardant l'hypothèse sur l'espace ambiant).

II (*4 pts*)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'application f définie sur E par

$$f(P) = \int_0^1 P(t)^3 \, \mathrm{d}t, \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X].$$

est différentiable et calculer la différentielle $\mathrm{d}_P f$ en tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

III (*8 pts*)

Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ pour lequel :

$$\alpha \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|, \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

1. ***(1 pt)*** Donner un exemple d'une telle application f, avec f non linéaire.
2. ***(1 pt)*** Montrer que f est injective.
3. ***(2 pts)*** Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. Pour cela, montrer que si une suite de points de $f(\mathbb{R}^n)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^n$, alors $\ell \in f(\mathbb{R}^n)$
4. ***(2 pts)*** Montrer que $\mathrm{d}_x f$ est injective en tout point $x \in \mathbb{R}$. Pour cela, considérer un point $x \in \mathbb{R}^n$ et un accroissement $h \in \mathbb{R}^n$, et appliquer l'hypothèse de l'énoncé à la différence $f(x+h) - f(x)$.
5. ***(2 pts)*** Rappeler pourquoi f est un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^n$. En déduire que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert, et donc que f est surjective.

IV (*4 pts*)

Montrer que la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.