Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3 Novembre 2014

CALCUL DIFFERENTIEL - PREMIER PARTIEL

I (*6 pts*)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathcal{M}_n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille (n, n) et par $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel des matrices carrées symétriques. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n$ on désigne par ${}^tM$ la transposée de M.

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n$ une matrice symétrique inversible. On considère l'application

$$f \colon \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n, \quad M \in \mathcal{M}_n \longmapsto {}^tMA_0M.$$

1. (***1 pt***) Montrer que f est une application différentiable.
2. (***3 pts***) Soit $I_n \in \mathcal{M}_n$ la matrice identité. Calculer la différentielle $\mathrm{d}_{I_n}f$ (en précisant soigneusement à quel espace appartient cette application).
3. (***2 pts***) Montrer que $\mathrm{d}_{I_n}f$ est surjective. Déterminer le noyau de $\mathrm{d}_{I_n}f$.

II (*5 pts*)

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les nombres réels a et b pour que l'application $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x + a\sin(y), y + b\sin(x))$$

soit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

III (5 *pts*)

On considère l'application $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x + y), 1 + \frac{2}{3}\arctan(x - y)\right).$$

1. (***3 pts***) Montrer qu'il existe une norme sur $\mathbb{R}^2$ telle que f soit contractante pour cette norme.
2. (***2 pts***) Montrer que f admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}^2$.
3. En quels points l'application f est-elle un difféomorphisme local ?

IV (4 *pts*)

Existe-t-il une application d'un espace métrique sur lui-même qui soit contractante (c'est-à-dire k-lipschitzienne avec $0 < k < 1$) mais sans points fixes ? Si la réponse est NON expliquer pourquoi, et si la réponse est OUI donner un exemple.