Université de Bourgogne — Novembre 2013
Département de Mathématiques - L3

CALCUL DIFFERENTIEL - PREMIER PARTIEL

I (*7 pts*)

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$.

1. ***(3 pts)*** Montrer que l'égalité $f(x,y) = 0$ définit au voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ une fonction $\varphi\colon x \mapsto y = \varphi(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$.
2. ***(2 pts)*** Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.
3. ***(2 pts)*** En déduire le sens de variation de φ au voisinage de 0.

II (*13 pts*)

1. ***(2 pts)*** Montrer qu'une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial u} = f$ si et seulement si $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\mathrm{e}^{-u} f\right) = 0$. En déduire que les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial u} = f$ sont de la forme $f\colon (u,v) \mapsto A(v)\,\mathrm{e}^u$, où $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. ***(4 pts)*** Montrer que l'application $\varphi\colon (x,y) \mapsto (u,v) = \left(x+y, x+\dfrac{1}{2}\sin y\right)$ est un difféomorphisme (global) de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. ***(2 pts)*** Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On pose $g = f \circ \varphi$. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.
4. ***(2 pts)*** En déduire que la fonction g est solution de l'équation
$$\cos y \frac{\partial g}{\partial x} - 2\frac{\partial g}{\partial y} = (\cos y - 2)\, g \qquad (*)$$
si et seulement si la fonction f vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial u} = f$.
5. ***(3 pts)*** Déduire des questions précédentes la forme générale des solutions g de l'équation $(*)$.