Université de Bourgogne — Novembre 2013
Département de Mathématiques - L3

CALCUL DIFFERENTIEL - CORRIGÉ DU PREMIER PARTIEL

I

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$.

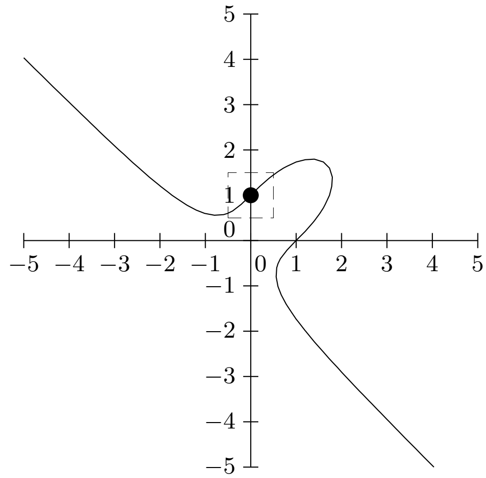

Figure 1: $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0\right\}$

1. L'unique point d'abscisse nulle de la courbe $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) = 0\right\}$ est le point $(0,1)$. On vérifie que le ***théorème des fonctions implicites*** s'applique en ce point. En effet f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $f(0,1) = 0$. De plus, en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3\left(y^2 - x\right)$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 3 \neq 0$. Il résulte du théorème des fonctions implicites qu'il existe un voisinage ouvert $I \times J$ de $(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une fonction $\varphi\colon I \to J$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$\forall (x,y) \in I \times J, \quad f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x).$$

2. On sait que $\varphi(0) = 1$. De plus, au voisinage de $0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = -\frac{3\left(x^2 - y\right)}{3\left(y^2 - x\right)}.$$

Donc $\varphi'(0) = -\dfrac{-3}{3} = 1$.

3. Puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$, sa dérivée φ' est continue, et donc strictement positive au voisinage de 0. Donc φ est strictement croissante au voisinage de 0.

II

1. Sur $\mathbb{R}^2$, on a les égalités suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathrm{e}^{-u} f\right) = -\mathrm{e}^{-u} f + \mathrm{e}^{-u}\frac{\partial f}{\partial u} = -\mathrm{e}^{-u}\left(f - \frac{\partial f}{\partial u}\right).$$

Puisque $\mathrm{e}^{-u} \neq 0$ pour tout u, alors $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\mathrm{e}^{-u} f\right) = 0$ si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial u} = f$. Donc les solutions de cette dernière équation sont les fonction f telles que la fonction $\mathrm{e}^{-u} f$ ne dépende pas de u, c'est à dire n'est fonction que de v. Ainsi une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial u} = f$ si et seulement si il existe une fonction $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\mathrm{e}^{-u} f(u,v) = A(v)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, c'est à dire $f(u,v) = A(v)\,\mathrm{e}^u$.

2. Il est clair que φ est de classe $\mathcal{C}^1$. On montre déja que φ est un difféomorphisme local en tout point de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Son déterminant jacobien en (x, y) est égal en effet à

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}\cos y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cos y - 1 < 0 \text{ car } \cos y < 2 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

On montre ensuite que $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une bijection. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (u, v)$, c'est à dire

$$\begin{aligned} x + y &= u \\ x + \frac{1}{2}\sin y &= v. \end{aligned}$$

On déduit de la première équation $x = u - y$, ce qui, une fois reporté dans la deuxième équation, donne

$$h(y) = u - y + \frac{1}{2}\sin y = v.$$

On veut montrer qu'il existe un unique $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $h(y_0) = v$.

Première méthode. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$, et vérifie $h'(y) = -1 + \frac{1}{2}\cos y < 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Cette fonction est donc une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim_{y\to-\infty} h(y) = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty} h(y) = -\infty$. Ainsi h est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et donc il existe un unique élément $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $h(y_0) = v$.

Deuxième méthode. L'équation $h(y) = v$ peut s'écrire $y = u - v + \dfrac{1}{2}\sin y = \ell(y)$. On cherche donc à montrer que la fonction ℓ admet un unique point fixe $y_0 \in \mathbb{R}$. Il suffit pour cela de montrer que h est une contraction sur le métrique fermé $\mathbb{R}$. On a

$$\ell'(y) = -\frac{1}{2}\cos y.$$

Donc $|\ell'(y)| \le 1/2 < 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, ce qui prouve le résultat.

L'unique antécédant de (u, v) par φ est donc $(u - y_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

3. On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f\left(x + y, x + \frac{1}{2}\sin y\right)\right) = \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(x, y)) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(f\left(x + y, x + \frac{1}{2}\sin y\right)\right) = \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(x, y)) + \frac{1}{2}\cos y \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(x, y)). \end{aligned}$$

4. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $(u, v) = \varphi(x, y)$ (et donc $(x, y) = \varphi^{-1}(u, v)$). On déduit des égalités de la question **3.** la relation :

$$\begin{aligned} \cos y \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - 2\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)(\cos y - 2) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)(\cos y - \cos y) \\ &= (\cos y - 2)\frac{\partial f}{\partial u}(u, v). \end{aligned}$$

Puisque $\cos y - 2$ n'est jamais nul, la fonction g est solution de l'équation $(*)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) &= g(x, y) \text{ c'est à dire si} \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) &= g\left(\varphi^{-1}(u, v)\right) = f(u, v). \end{aligned}$$

5. Les solutions g de l'équation $(*)$ sont de la forme $(x, y) \mapsto f(\varphi(x, y))$, où f est solution $\dfrac{\partial f}{\partial u} = f$ (voir la question **1.**). Ainsi, la fonction g est solution de $(*)$ si et seulement si il existe une fonction $A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$g(x, y) = A\left(x + \frac{1}{2}\sin y\right)\mathrm{e}^{x+y}.$$