Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3

Novembre 2011

CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL - PREMIER PARTIEL

I (*5 pts*)

Soit m un paramètre réel. On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^m \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Montrer que pour $m > 3/2$, f est différentiable en $(0,0)$ et donner sa différentielle (on pourra utiliser les coordonnées polaires).

II (*5 pts*)

On se donne $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, et on considère l'ellipsoïde $\mathcal{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$.

1. Calculer l'équation du plan tangent à $\mathcal{E}$ en un point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$.
2. Déterminer les points $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$ en lesquels le plan tangent à $\mathcal{E}$ intersecte les axes de coordonnées en des points $A \in Ox$, $B \in Oy$ et $C \in Oz$ tels que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$.

III (*5 pts*)

Montrer que l'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^3 + y, \mathrm{e}^y - x)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$.

IV (*5 pts*)

On rappelle que l'application $\varphi\colon (s,t) \mapsto \left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On pose $g = f \circ \varphi$. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial s}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial t}$ en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. En déduire que si f est solution de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

alors il existe une fonction $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x,y) = h(x+y)$.