Université de Bourgogne — Janvier 2017
Département de Mathématiques - L3

CALCUL DIFFERENTIEL - EXAMEN CORRIGÉ

I *(9 pts)*

Notation. Pour toute application $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on note $g^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $g^p = g \circ \cdots \circ g$ (p fois).

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et f un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que $f(a) = a$ et qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. On note $L = \mathrm{d}_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $u = \sum_{k=1}^q \left(L^{-k} \circ f^k\right) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

1. ***(2 pts)*** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer par récurrence que $\mathrm{d}_a\left(f^k\right) = L^k$. Déduire des hypothèses que $L^q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.
   Si $k = 0$, on a $\mathrm{d}_a\left(f^0\right) = \mathrm{d}_a \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = L^0$. Si la propriété est supposée vraie pour $k \in \mathbb{N}$, on en déduit, en utilisant que $f(a) = a$ (et donc $f^k(a) = a$ pour tout k) :
   $$\mathrm{d}_a\left(f^{k+1}\right) = \mathrm{d}_a\left(f \circ f^k\right) = \mathrm{d}_{f^k(a)} f \circ \mathrm{d}_a\left(f^k\right) = \mathrm{d}_a f \circ L^k = L \circ L^k = L^{k+1},$$
   ce qui démontre l'affirmation.
   Par conséquent: $L^q = \mathrm{d}_a\left(f^q\right) = \mathrm{d}_a\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}\right) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.
2. ***(1 pt)*** En déduire que u est un difféomorphisme local au point a. On a, en utilisant toujours $f^k(a) = a$ pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathrm{d}_a u = \mathrm{d}_a\left(\sum_{k=1}^q \left(L^{-k} \circ f^k\right)\right) = \sum_{k=1}^q \mathrm{d}_a\left(L^{-k} \circ f^k\right) = \sum_{k=1}^q \left(\mathrm{d}_a\left(L^{-k}\right) \circ \mathrm{d}_a\left(f^k\right)\right) = \sum_{k=1}^q \left(L^{-k} \circ L^k\right) = q \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, qui est une application linéaire inversible. Le théorème d'inversion locale garantit alors que u est un difféomorphisme local au point a.
3. ***(1 pt)*** Montrer que $u \circ f = L \circ u$. On a:
   $$\begin{aligned} u \circ f &= \sum_{k=1}^q \left(L^{-k} \circ f^k\right) \circ f = \sum_{k=1}^q \left(L^{-k} \circ f^{k+1}\right) = \sum_{k=1}^q L \circ \left(L^{-(k+1)} \circ f^{k+1}\right) \\ &= L \circ \sum_{k=1}^q \left(L^{-(k+1)} \circ f^{k+1}\right) = L \circ \left(\left(\sum_{k=2}^q L^{-k} \circ f^k\right) + L^{-(q+1)} \circ f^{-(q+1)}\right) \\ &= L \circ \left(\left(\sum_{k=2}^q L^{-k} \circ f^k\right) + L^{-1} \circ f^{-1}\right) \quad (\text{car } L^q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \text{et } f^q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \\ &= L \circ u, \end{aligned}$$
   ce qui démontre le résultat.
4. ***(1 pt)*** Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un voisinage de a tel que $u\colon U \to u(U)$ soit un difféomorphisme. Montrer que $b \in U$ est un point fixe de f si et seulement si $u(b) \in u(U)$ est un point fixe de L. Si $b \in U$ est un point fixe de f, on a : $L(u(b)) = (L \circ u)(b) = (u \circ f)(b) = u(f(b)) = u(b)$. Donc $u(b)$ est un point fixe de L.
   Réciproquement, si $u(b)$ est un point fixe de L, on a : $L(u(b)) = u(b)$, donc $u(f(b)) = u(b)$, et donc, en composant par u^{-1}, $f(b) = b$: ainsi b est un point fixe de f.
5. ***(2 pts)*** Déduire des questions précédentes que l'ensemble des points fixes de f est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. On désigne par S l'ensemble des points fixes de f. Soient $a \in S$ et $L = \mathrm{d}_a f$. On désigne par M l'ensemble des points fixes de L. En utilisant les notations et résultats précédents, il existe un difféomorphisme $u\colon U \to u(U)$ défini sur un voisinage U du point a tel que $u(S \cap U) = M \cap u(U)$. Or M est un sous-espace vectoriel, et donc une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. On en déduit que S est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ au voisinage du point a. En effet, si $G\colon V \subseteq u(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ est-une application de rang q telle que $M \cap V = G^{-1}(0) \cap V$, alors $G \circ u$ est une application de rang q au point a (car u est un difféomorphisme) telle que $S \cap u^{-1}(V) = \left((G \circ u)^{-1}(0)\right) \cap u^{-1}(V)$.

   Puisque a est un point quelconque de S, il en résulte que S est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

6. ***(2 pts)*** Soit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto g(x,y) = \left(x, y+y^3-x^2\right)$. Montrer que g est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. En déduire que le résultat de la question 5. n'est plus nécessairement valide si on omet l'hypothèse $f^q = \mathrm{Id}$. On constate que le déterminant jacobien de g en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ égale $1+3y^2 \neq 0$, donc f est un difféomorphisme local en chaque point. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que (u,v) admet un antécedant unique $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a évidemment $x = u$, d'où l'on déduit que $y^3+y = v+u^2$. Or $h : y \mapsto y^3+y$ est un polynôme de degré impair dont la dérivée est en tout point strictement positive, donc $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une surjection. Il existe un réel unique y tel que $h(y) = v-u$.
   On en déduit que g est surjective, et donc est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   Il est clair que l'ensemble des points fixes de g est $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^3-x^2 = 0\right\}$, qui n'est pas une sous-variété au point $(0,0)$ (bien que $(0,0)$ soit un point fixe de g). C'est donc bien l'hypothèse "g périodique" qui est mise en défaut.

II *(5 pts)*

On considère l'équation

$$(E) \quad \sin(tx)+\cos(tx) = x.$$

1. ***(1 pt)*** Montrer que $|\cos u - \sin u| \leq \sqrt{2}$, $\forall u \in \mathbb{R}$. Les extrema de la fonction $u \mapsto \cos u - \sin u$ sont atteints aux points $\frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en lesquels cette fonction vaut $\pm\sqrt{2}$.
2. ***(1 pt)*** En déduire que pour tout réel t tel que $|t| < 1/\sqrt{2}$ l'équation (E) admet une unique solution $x = \varphi(t)$. Pour $t \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ fixé, on considère la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sin(tx)+\cos(tx)-x$. On voit que $\lim_{x\to-\infty} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} = -\infty$. De plus $g'(x) = t(\cos(tx) - \sin(tx)) - 1$. Mais, puisque $|t| < 1/\sqrt{2}$ et $|\cos(tx) - \sin(tx)| < \sqrt{2}$, cette dérivée ne s'annule en aucun point. Ainsi la fonction g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un unique point, noté $\varphi(t)$, en lequel g s'annule.
3. ***(1 pt)*** Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$. Il résulte du théorème des fonctions implicites appliqué en chaque point $(t, \varphi(t))$, $t \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$. On a de plus :

   $$\sin(t\varphi(t)) + \cos(t\varphi(t)) - \varphi(t) = 0 \quad (*)$$

   sur cet intervalle. En dérivant cette expression, on obtient :

   $$\cos(t\varphi(t))(\varphi(t)+t\varphi'(t)) - \sin(t\varphi(t))(\varphi(t)+t\varphi'(t)) - \varphi'(t) = 0, \text{ et donc :}$$
   $$\varphi'(t) = \frac{-\cos(t\varphi(t))\varphi(t) + \sin(t\varphi(t))\varphi(t)}{t\cos(t\varphi(t)) - t\sin(t\varphi(t)) - 1}.$$

   On voit que φ' est une composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: φ' est de classe $\mathcal{C}^1$, donc φ est de classe $\mathcal{C}^2$.
4. ***(2 pts)*** Donner un développement limité de φ en 0 à l'ordre 2. En dérivant la relation $(*)$, on calcule les dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2 en $t = 0$. On a :
   (a) $\cos(0) = \varphi(0)$, donc $\varphi(0) = 1$.
   (b) $\cos(t\varphi(t))(\varphi(t)+t\varphi'(t)) - \sin(t\varphi(t))(\varphi(t)+t\varphi'(t)) - \varphi'(t) = 0$, donc avec $t = 0$: $1 - \varphi'(0) = 0$, donc $\varphi'(0) = 1$.
   (c) En dérivant $(*)$ deux fois et en posant $t = 0$, on trouve donc $\varphi''(0) = 1$. Le développement de Taylor de φ en 0 à l'ordre 2 est donc $\varphi(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)$.

III *(6 pts)*

Soit $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2-xy-1 = 0\right\}$.

1. ***(1 pt)*** Montrer que $\mathcal{C}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. On peut remarquer que $\mathcal{C}$ est une ellipse, donc une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. Sinon, on pose $f(x,y) = x^2+y^2-xy-1$, et donc $\mathrm{d}_{(x,y)}f = (2x-y)\,\mathrm{d}x + (2y-x)\,\mathrm{d}y$. Cette différentielle ne s'annule qu'au point $(0,0)$, qui n'appartient pas à $\mathcal{C}$. Donc $\mathcal{C}$ est une courbe.
2. ***(1 pt)*** Déterminer l'équation du plan tangent à $\mathcal{C}$ au point $(1,0)$. On a $\mathrm{d}_{(1,0)}f = 2\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$, donc la droite tangente $T_{(1,0)}\mathcal{C}$ a pour équation $2(x-1) - y = 0$.

3. ***(1 pt)*** Donner une coordonnée rectifiante pour $\mathcal{C}$ au voisinage de ce point. Les deux composantes de $\mathrm{d}_{(1,0)}f$ ne sont pas nulles, donc on peut prendre

$$\varphi : (x, y) \mapsto \left(x, x^2 + y^2 - xy - 1\right).$$

4. ***(1 pt)*** Déterminer les points critiques de la fonction $g\colon (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ en restriction à $\mathcal{C}$. En un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{d}_{(x,y)}g$ est un multiple de $\mathrm{d}_{(x,y)}f$ si et seulement si $(x - y)(x + y) = 0$, c'est à dire si $y = \pm x$. Il y a donc quatre points critiques de $g|_{\mathcal{C}}$: $D = (1, 1)\,, C = (-1, -1)\,, B = \left(\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3\right)$ et $A = \left(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\right)$.
5. ***(2 pts)*** Donner la nature de ces points critiques. La fonction g atteint sur le compact $\mathcal{C}$ son maximum et son minimum en des points qui sont des points critiques de $g|_{\mathcal{C}}$. Or on a : $g(A) = g(B) = 2/3$ et $g(C) = g(D) = 2$. Donc C et D sont des maxima de $g|_{\mathcal{C}}$, alors que A et B sont des minima de $g|_{\mathcal{C}}$.