Université de Bourgogne Janvier 2015
Département de Mathématiques - L3
Année 2014-2015

CALCUL DIFFERENTIEL - EXAMEN

I (*5 pts*)

Résoudre le système différentiel

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + 1 \\ y' &= x + t. \end{aligned}$$

II (*5 pts*)

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2+z^2}$.

1. Trouver les points critiques de f et donner leur nature. Le gradient Le gradient de f en un point (x,y,z) est le vecteur $-\dfrac{2}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ainsi l'unique point critique de f est l'origine O. On a $f(O) = 1$. C'est un maximum global strict de f car, si $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ alors $1+x^2+y^2+z^2 > 1$ et donc $f(x,y,z) < 1 = f(O)$.
2. Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon xyz = 1\}$. Montrer que V est une sous-variété de codimension 1 de $\mathbb{R}^3$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}^3$ par $g(x,y,z) = xyz - 1$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Le gradient de g au point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$. Le lieu d'annulation de ce gradient est l'union des trois axes de coordonnées Ox, Oy et Oz. Or cet ensemble est disjoint de V. Par conséquent V est une sous-variété de codimension 1 en chacun de ses points.
3. Déterminer les points critiques de f restreinte à V. Il s'agit de trouver les points de V en lesquels le gradient de f et celui de g sont colinéaires. Ce sont les points $(x,y,z) \in V$ en lesquels
$$\frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} = \frac{xy}{z}.$$
Or les éléments de V vérifient la relation $xyz = 1$. On obtient ainsi les équations
$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}.$$
Les points cherchés sont donc $(1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$ $(1,-1,-1)$.
4. Soit $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$. Montrer que $E = V \cap B$ est compact. Il s'agit d'un ensemble fermé (car défini par des égalités ou des inégalités larges satisfaites par des fonctions continues) et borné (car contenu dans la sphère de centre O et de rayon 4). C'est donc un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^3$.

5. En déduire les extrema de f restreinte à E. Pour cela, on pourra considérer la sphère $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 = 4\}$ et l'ouvert $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 < 4\}$, et chercher ces extrema sur les ensembles $E \cap U$ et $E \cap S$. Sur le compact E, la fonction continue f est bornée et atteint ses bornes en certains points de E. Ces points peuvent appartenir à $E \cap U$ comme à $E \cap S$. Ceux qui appartiennent à $E \cap U$ figurent parmi les points trouvés dans la question 3. En tous ces points, la valeur prise par f est $\frac{1}{4}$. D'autre part, la fonction f restreinte à $E \cap S$ est constante, et prend la valeur $\frac{1}{5}$. Ainsi, tous les points trouvés à la question 3 sont des maxima de $f|_E$ et tous les points de $E \cap S$ sont des minima de $f|_E$.

III (5 *pts*)

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit $f_\lambda \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \lambda x^4 + y^4 + 4x^3y + x^5 - y^5.$$

1. Montrer que $(0,0)$ est un point critique de f_λ. C'est ce que montre un calcul immédiat
2. On suppose $\lambda \neq 3$. Etudier le signe du polynôme $P_\lambda(x,y) = \lambda x^4 + y^4 + 4x^3y$ en posant $y = tx$. En déduire la nature du point critique $(0,0)$. On constate que la forme quadratique est nulle. De même $\mathrm{d}_0^3 f$ est nulle. On fait donc l'étude du polynôme homogène $\mathrm{d}_0^4 f$, c'est à dire (à un facteur près) du polynôme $P_\lambda(x,y)$. Pour cela, on pose $y = tx$, et on obtient $P_\lambda(x,tx) = x^4(t^4+4t+\lambda) = x^4 g_\lambda(t)$. L'étude de la fonction $t \mapsto g_\lambda(t)$ montre qu'elle est décroissante de $+\infty$ jusqu'à $g_\lambda(-1) = \lambda - 3$, puis croissante jusqu'en $+\infty$. Donc si $\lambda > 3$, $P_\lambda(x,y) > 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, et la fonction présente un minimum local en $(0,0)$. Si $\lambda < 3$, $P_\lambda(x,y)$ prend des valeurs positives et négatives : donc $(0,0)$ n'est pas un extremum local de f.
3. On suppose $\lambda = 3$. Factoriser P_λ. Montrer, en étudiant f aux points (x,y) en lesquels $P_\lambda(x,y) = 0$, que $(0,0)$ n'est ni un minimum local, ni un maximum local de f. On voit que $f_\lambda(x,-x) = 2x^5$. La fonction f change de signe au voisinage de l'origine, donc $(0,0)$ n'est pas un extremum local de f.

IV (5 *pts*)

Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \|x-y\| \leq \|f(x) - f(y)\|.$$

Montrer que :

1. f est injective; Il résulte de l'inégalité que $f(x) = f(y)$ implique que $x = y$.
2. $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé (on pourra montrer que toute suite de Cauchy d'éléments de $f(\mathbb{R}^n)$ converge) ; On considère une suite de Cauchy $y_n = f(x_n) \in f(E)$. D'après l'inégalité, la suite (x_n) est également de Cauchy, dont converge vers un élément $\ell \in \mathbb{R}^n$. Puisque f est continue $y_n = f(x_n)$ converge vers $f(\ell)$, c'est à dire vers un élément de $f(E)$.
3. $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert (on pourra montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^n$) ; Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrons que $\mathrm{d}_{x_0} f$ est injective. Soit $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ and $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors
$$\|f(x_0+th) - f(x_0)\| \geq |t| \, \|h\|,$$
donc en faisant tendre t vers 0, on a $\|\mathrm{d}_{x_0} f(h)\| \geq \|h\| > 0$. Ainsi $\mathrm{d}_{x_0} f(h) \neq 0$ et
4. f est surjective. $f(E)$ est non vide, ouvert et fermé. Puisque $\mathbb{R}^n$ est connexe, $f(E) = \mathbb{R}^n$: f est surjective.