Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3

Janvier 2013

CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL - CORRIGE DU PREMIER PARTIEL

I

Soit $g\colon (x,y) \mapsto x^3 + y^3 + x + y - 4$.

1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 1$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 1$. Donc $\mathrm{d}_{(x,y)} f \neq 0$ et $\mathcal{C}$ est une sous-variété (de dimension 1) en chacun de ses points.
2. En un tel point (x,y) les vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y)$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y)$ sont colinéaires. On a donc
$$\begin{aligned} ay\mathrm{e}^{axy}\left(3y^2+1\right) - ax\mathrm{e}^{axy}\left(3x^2+1\right) = 0, \text{ et} \\ 3y^3 + y = 3x^3 + x. \end{aligned}$$
3. Un tel point (x_0, y_0) est solution du système
$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0 \\ 3x^3 - 3y^3 + x - y = 0. \end{aligned}$$
Or $3x^3 - 3y^3 + x - y = (x-y)\left(3x^2 + 3y^2 + 1\right)$, donc on déduit $x = y$ de deuxième équation. En reportant dans la première équation on obtient $2x^3 + 2x - 4 = 0$, dont l'unique solution réelle est $x = 1$. L'unique point critique de la restriction de f à $\mathcal{C}$ est $(x_0, y_0) = (1,1)$.
4. Le passage en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ donne
$$x^3 + y^3 + x + y - 4 = r^3\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta + \varepsilon(r,\theta)\right), \text{ où } \varepsilon(r,\theta) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
On en déduit que lorsque $r \to +\infty$ le long de la courbe $\mathcal{C}$, $\cos^3\theta + \sin^3\theta \to 0$, et donc que $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont de signe opposés. Par conséquent,
$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-ar^2\cos\theta\sin\theta} \to 0$$
quand $(x,y) \to \infty$ le long de $\mathcal{C}$.
5. $f(1,1) = \mathrm{e}^{-a} > 0$. D'après la question précédente, il existe $r_0 > 0$ tel que $r \geq r_0$ implique $f(x,y) < f(1,1)$. Donc le maximum atteint par f sur le compact $\mathcal{C} \cap \{(x,y) :\ \|(x,y)\| \leq r_0\}$ est un maximum global de f sur $\mathcal{C}$, en un point qui est l'unique point critique $(1,1)$.

II

1. On commence par chercher un système fondamental de solutions du système homogène $Y'(t) = A \cdot Y(t)$. Le polynôme caractéristique de A est $P_A(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-2)(x-1)^2$. Les calculs usuels mènent à :

1. un vecteur propre $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre 2,
2. un vecteur propre $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre 1 et un vecteur $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tel que $(A - \mathrm{Id})(v_3) = v_2$

   (il n'y a pas unicité du vecteur v_3 ; par exemple, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ conviennent également).

On en déduit un système fondamental de solution donné par
$$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3(t) = \mathrm{e}^{t}(v_3 + tv_2) = \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1+t \\ 1+t \end{pmatrix}.$$
La solution générale du système homogène est donc
$$\varphi(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + C_3\varphi_3(t), \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

2. On cherche une solution de l'équation complète sous la forme

$$\varphi(t) = C_1(t)\,\varphi_1(t) + C_2(t)\,\varphi_2(t) + C_3(t)\,\varphi_3(t)\,,\ \text{où } C_1, C_2, C_3 \colon \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}.$$

En substituant cette expression à la place de $Y(t)$ dans l'équation complète, on obtient

$$\varphi(t) = C_1'(t)\,\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + C_2'(t)\,\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_3'(t)\,\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}-1\\1+t\\1+t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\t\\t\end{pmatrix}.$$

Une solution particulière est donc connée en calculant des fonctions C_1, C_2 et C_3 telles que

$$C_1'(t) = 0,\ C_2'(t) = t\mathrm{e}^{-t},\ C_3'(t) = 0.$$

On trouve $C_1(t) = C_3(t) = 0$ et $C_2(t) = -(t+1)\,\mathrm{e}^{-t}$ et la solution particulière $\varphi(t) = -(t+1)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

III

1. C'est l'application directe du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cadre des équations différentielles linéaires.
2. D'après la définition de φ_λ, on a $\varphi_\lambda'(x_0) = a(x_0)\,\lambda + b(x_0)$. Un vecteur directeur de D_λ est $\begin{pmatrix}1\\ \varphi_\lambda'(x_0)\end{pmatrix}$. L'équation de D_λ est donc

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & 1 \\ y - \lambda & \varphi_\lambda'(x_0)\end{vmatrix} = 0,\ \text{c'est à dire}$$
$$(x - x_0)\,(a(x_0)\,\lambda + b(x_0)) = y - \lambda$$

3. Si $a(x_0) = 0$, les droites D_λ ont toutes $\begin{pmatrix}1\\ b(x_0)\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur et sont donc toutes parallèles.
4. Si $a(x_0) \neq 0$, on cherche l'intersection de deux tangentes D_λ et D_μ en résolvant le système

$$\begin{aligned}(x - x_0)\,(a(x_0)\,\lambda + b(x_0)) &= y - \lambda\\ (x - x_0)\,(a(x_0)\,\mu + b(x_0)) &= y - \mu\end{aligned}$$

Un calcul direct donne le point d'intersection $\left(x_0 - \frac{1}{a(x_0)}, -\frac{b(x_0)}{a(x_0)}\right)$, qui ne dépend pas de λ ou μ. Ceci montre que les droites D_λ sont coucourantes en ce point.