Université de Bourgogne — Janvier 2017
Département de Mathématiques - L3

CALCUL DIFFERENTIEL - EXAMEN

I *(9 pts)*

Notation. Pour toute application $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on note $g^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $g^p = g \circ \cdots \circ g$ (p fois).

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et f un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que $f(a) = a$ et qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. On note $L = \mathrm{d}_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $u = \sum_{k=1}^{q} \left(L^{-k} \circ f^k\right) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

1. ***(2 pts)*** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer par récurrence que $\mathrm{d}_a\left(f^k\right) = L^k$. Déduire des hypothèses que $L^q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.
2. ***(1 pt)*** En déduire que u est un difféomorphisme local au point a.
3. ***(1 pt)*** Montrer que $u \circ f = L \circ u$.
4. ***(1 pt)*** Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un voisinage de a tel que $u\colon U \to u(U)$ soit un difféomorphisme. Montrer que $b \in U$ est un point fixe de f si et seulement si $u(b) \in u(U)$ est un point fixe de L.
5. ***(2 pts)*** Déduire des questions précédentes que l'ensemble des points fixes de f est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
6. ***(2 pts)*** Soit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto g(x,y) = (x, y + y^3 - x^2)$. Montrer que g est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. En déduire que le résultat de la question 5. n'est plus nécessairement valide si on omet l'hypothèse $f^q = \mathrm{Id}$.

II *(5 pts)*

On considère l'équation

$$(E) \qquad \sin(tx) + \cos(tx) = x.$$

1. ***(1 pt)*** Montrer que $|\cos u - \sin u| \leq \sqrt{2}$, $\forall u \in \mathbb{R}$.
2. ***(1 pt)*** En déduire que pour tout réel t tel que $|t| < 1/\sqrt{2}$ l'équation (E) admet une unique solution $x = \varphi(t)$.
3. ***(1 pt)*** Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$.
4. ***(2 pts)*** Donner un développement limité de φ en 0 à l'ordre 2.

III *(6 pts)*

Soit $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 - xy - 1 = 0\}$.

1. ***(1 pt)*** Montrer que $\mathcal{C}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.
2. ***(1 pt)*** Déterminer l'équation du plan tangent à $\mathcal{C}$ au point $(1,0)$.
3. ***(1 pt)*** Donner une coordonnée rectifiante pour $\mathcal{C}$ au voisinage de ce point.
4. ***(1 pt)*** Déterminer les points critiques de la fonction $g\colon (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ en restriction à $\mathcal{C}$.
5. ***(2 pts)*** Donner la nature de ces points critiques.