

CALCUL DIFFERENTIEL - EXAMEN

I (5 pts)

Résoudre le système différentiel

$$\begin{aligned}x' &= 2x - y + 1 \\y' &= x + t.\end{aligned}$$

II (5 pts)

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$.

1. Trouver les points critiques de f et donner leur nature.
2. Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: xyz = 1\}$. Montrer que S est une sous-variété de codimension 1 de \mathbb{R}^3 .
3. Déterminer les points critiques de f restreinte à S .
4. Soit $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Montrer que $E = S \cap B$ est compacte.
5. En déduire les extrema de f restreinte à E . Pour cela, déterminer les extrema de f restreinte à l'intersection de E avec la *boule ouverte* de rayon 4, puis étudier la restriction de f à l'intersection de E avec la sphère de rayon 4.

III (5 pts)

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit $f_\lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \lambda x^4 + y^4 + 4x^3y + x^5 - y^5.$$

1. Montrer que $(0, 0)$ est un point critique de f_λ .
2. On suppose $\lambda \neq 3$. Etudier le signe du polynôme $P_\lambda(x, y) = \lambda x^4 + y^4 + 4x^3y$ en posant $y = tx$. En déduire la nature du point critique $(0, 0)$.
3. On suppose $\lambda = 3$. Factoriser P_λ . Etudier f sur l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en lesquels P_λ s'annule, et en déduire la nature du point critique $(0, 0)$.

IV (5 pts)

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|.$$

Montrer que :

1. f est injective ;
2. $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé (on pourra montrer que toute suite de Cauchy d'éléments de $f(\mathbb{R}^n)$ converge) ;
3. $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert (on pourra montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de \mathbb{R}^n) ;
4. f est surjective.
5. Donner un exemple simple d'une telle fonction (qui ne soit pas égale à l'identité).