Université de Bourgogne — Janvier 2014

Département de Mathématiques - L3

CALCUL DIFFERENTIEL 2013–2014 - Examen

I (*7 pts*)

On considère la fonction f définie sur le compact $K = [0,1] \times [0,1]$ par

$$f(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

1. **(*1 pt*)** Rappeler pourquoi f est bornée sur K et atteint ses bornes.
2. **(*2 pts*)** Montrer que f a un unique point critique c dans $\overset{\circ}{K} =]0,1[\times]0,1[$, et calculer $f(c)$.
3. **(*2 pts*)** Montrer que c est un maximum local de f.
4. **(*1 pt*)** Etudier les fonctions $g\colon t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ et $h : t \mapsto \dfrac{t+1}{2(1+t^2)}$ sur l'intervalle $[0,1]$.
5. **(*1 pt*)** En déduire que c est le maximum global de f sur K.

II (*4 pts*)

Soit $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $a(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + a(x)\, y = 0.$$

1. (***1 pt***) Rappeler pourquoi pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution maximale $x \mapsto y(x)$ de (E) telle que $y(0) = y_0$. Quel est l'intervalle de définition de cette solution ?
2. (***3 pts***) Montrer que toute solution de l'équation (E) tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

III (*11 pts*)

On considère l'ensemble $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x^2 - 4xy + 3y^2 - 4yz + 4z^2 - 1 = 0\}$.

1. **(*2 pts*)** Montrer que $\mathcal{S}$ est une sous-variété de de $\mathbb{R}^3$ en chacun de ses points.
2. **(*2 pts*)** Soit $a = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$. Donner l'équation du plan tangent $T_a\mathcal{S}$ à la variété $\mathcal{S}$ au point a.
3. On considère le point $P = (1,0,0)$ et l'ensemble $\mathcal{E} = \{a \in \mathcal{S} \colon P \in T_a\mathcal{S}\}$.
   (a) **(*2 pts*)** Montrer $\mathcal{E}$ est l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan affine d'équation $2x - 2y = 1$.
   (b) **(*1 pt*)** Montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas vide (on pourra considérer des valeurs simples de x).
   (c) **(*2 pts*)** Montrer que $\mathcal{E}$ est une sous-variété de codimension 2 de $\mathbb{R}^3$.
4. **(*2 pts*)** Parmi les points de $\mathcal{E}$, lequel est le plus éloigné de P ?