Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3

Janvier 2014

CALCUL DIFFERENTIEL 2013–2014 - Examen

I (*7 pts*)

On considère la fonction f définie sur le compact $K = [0,1] \times [0,1]$ par

$$f(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

1. **(*1 pt*)** Rappeler pourquoi f est bornée sur K et atteint ses bornes. L'ensemble K est compact, et f, en tant que fonction continue sur K, est bornée et atteint ses bornes.

2. **(*2 pts*)** Montrer que f a un unique point critique c dans $\mathring{K} =]0,1[\times]0,1[$, et calculer $f(c)$. On calcule les dérivées partielles de f :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x^2 - 2\cdot x \cdot y + 1}{(x^2+1)^2(y^2+1)} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2\cdot x\cdot y - y^2 + 1}{(y^2+1)^2(x^2+1)}.$$
Puisque f est une fonction symétrique de x et y, le point c appartient à la diagonale. L'unique point critique de f dans $\mathring{K}$ est donc $c = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Un calcul direct donne $f(c) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

3. **(*2 pts*)** Montrer que c est un maximum local de f. On calcule les dérivées secondes de f au point c, mais le calcul direct est compliqué.

4. **(*1 pt*)** Etudier les fonctions $g\colon t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ et $h : t \mapsto \dfrac{t+1}{2(1+t^2)}$ sur l'intervalle $[0,1]$. La fonction g est croissante sur $[0,1]$, de valeur maximum $g(1) = \frac{1}{2}$. La dérivée de h a le même signe que $-t^2 - 2t + 1$, qui s'annule en $t_0 = \sqrt{2} - 1$. La valeur maximum de h est atteinte en $h(t_0) = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$.

5. **(*1 pt*)** En déduire que c est le maximum global de f sur K. Les valeurs maximales des fonctions g et h donnent la valeur maximale de f sur le bord ∂K de K. On a donc $M = h(t_0) = \sup_{\partial K} f = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$. On voit que $M < f(c)$. Puisque f atteint son maximum sur K, ce maximum est donc atteint dans $\mathring{K}$, en l'unique point critique de f dans $\mathring{K}$, qui est le point c.

II (*4 pts*)

Soit $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $a(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + a(x)\,y = 0.$$

1. (***1 pt***) Rappeler pourquoi pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution maximale $x \mapsto y(x)$ de (E) telle que $y(0) = y_0$. Quel est l'intervalle de définition de cette solution ? La fonction $\Phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto a(x)\,y$, est de linéaire en y et de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires, en tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passe une solution maximale $x \mapsto y(x)$, définie sur $\mathbb{R}$, telle que $y(x_0) = y_0$.

2. (***3 pts***) Montrer que toute solution de l'équation (E) tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Les solutions générales de (E) sont de la forme $y(x) = K\mathrm{e}^{-\int_0^x a(t)\mathrm{d}t}$, où $K \in \mathbb{R}$. Puisque $a \geq 1$ sur $\mathbb{R}$, l'intégrale $\int^{+\infty} a(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente. Donc $\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et $y(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

III (*11 pts*)

On considère l'ensemble $\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x^2 - 4xy + 3y^2 - 4yz + 4z^2 - 1 = 0\right\}$.

1. **(*2 pts*)** Montrer que $\mathcal{S}$ est une sous-variété de de $\mathbb{R}^3$ en chacun de ses points. On peut procéder par calcul direct. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4(x-y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2(-2x+3y-2z)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -4(y-2z)$. On résout cette équation en exprimant x et y en fonction de z : $x = 2z$, $y = 2z$. On reporte dans $f(x,y,z)$ et on trouve $f(2z,2z,z) = -1 \neq 0$. On peut également remarquer que $f = P + 1$ où P est un polynôme homogène de degré 1. Donc $2P = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} + z\frac{\partial P}{\partial z}$ et $f = \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} + z\frac{\partial P}{\partial z}\right)/2 + 1$. Si les trois dérivées s'annulent en un point (x,y,z), alors $f(x,y,z) = -1 \neq 0$.

2. ***(2 pts)*** Soit $a = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$. Donner l'équation du plan tangent $T_a\mathcal{S}$ à la variété $\mathcal{S}$ au point a. On a $(X - x_0) P'_x(a) + (Y - y_0) P'_y(a) + (Z - z_0) P'_z(a) = 0$. Puisque P est homogène de degré 2 et que $a \in \mathcal{S}$, on a $XP'_x(a) + YP'_y(a) + ZP'_z(a) = 2$.

3. On considère le point $P = (1, 0, 0)$ et l'ensemble $\mathcal{E} = \{a \in \mathcal{S} \colon P \in T_a\mathcal{S}\}$.

   (a) ***(2 pts)*** Montrer $\mathcal{E}$ est l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan affine d'équation $2x - 2y = 1$. Un point $a \in \mathcal{S}$ contient P si $P'_x(a) = 2$, ou $4x - 4y = 2$.

   (b) ***(1 pt)*** Montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas vide (on pourra considérer des valeurs simples de x). Exemple $\left(0, -1/2, -\left(\sqrt{2} + 1\right)/4\right)$.

   (c) ***(2 pts)*** Montrer que $\mathcal{E}$ est une sous-variété de codimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Il s'agit de montrer que sur $\mathcal{E}$, les gradients de f et de $2x - 2y - 1$ sont linéairement indépendants. L'annulation du produit vectoriel de ces gradients conduit à $y = 2z$. Il reste à substituer $y = 2z$ et $x = 1/2\,(1 + 2y)$ dans f pour obtenir la valeur -1, donc les gradients sont non colinéaires en tout point de $\mathcal{S}$.

4. ***(2 pts)*** Parmi les points de $\mathcal{E}$, lequel est le plus éloigné de P ? On écrit la colinéarité des gradients de f, $2x - 2y - 1$, et $h(x, y, z) = (x - 1)^2 + y^2 + z^2$, on trouve un déterminant égal à $d = 8(y - 2z)(2x + 2y + z - 2)$. On a déjà vu que le facteur $y - 2z$ ne s'annule pas sur $\mathcal{E}$. On ne s'intéresse donc au deuxième facteur. L'intersection des lieux des zéros de ce deuxième facteur et de $2x - 2y - 1$ est la droite $x = 3/4 - z/4$, $y = 1/4 - z/4$. Elle intersecte $\mathcal{S}$ en deux points : $\begin{pmatrix} x = (\frac{1}{18} \cdot (-\sqrt{2} + 13)) & y = (\frac{1}{18} \cdot (-\sqrt{2} + 4)) & z = (\frac{1}{81} \cdot (\sqrt{2} \cdot 18 + 9)) \\ x = (\frac{1}{18} \cdot (\sqrt{2} + 13)) & y = (\frac{1}{18} \cdot (\sqrt{2} + 4)) & z = (\frac{1}{81} \cdot (-\sqrt{2} \cdot 18 + 9)) \end{pmatrix}$. On rentre ces coordonnées dans h, c'est le premier point le plus éloigné de $(1, 0, 0)$.